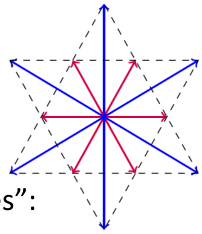
OLD

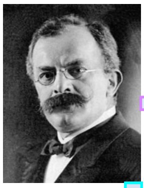
El álgebra de Lie g2



W. Killing, 1887:
Descubrimiento del álgebra sobre $\mathbb{C}$ a partir del "sistema de raíces":

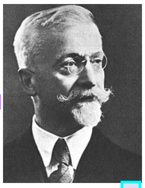
Obtuvo las constantes de estructura:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	h_1	h_2
e_1	0	$2e_3$	e_4	0	0	$3e_2$	$-h_1$	$-f_6$	$-2f_2$	$-3f_3$	0	0	$-2e_1$	e_1
e_2	$-2e_3$	0	$-e_5$	0	0	0	e_6	$-h_2$	$2f_1$	0	$3f_3$	$-3e_1$	e_2	$-2e_2$
e_3	$-e_4$	e_5	0	0	0	0	$2e_2$	$-2e_1$	$-h_1-h_2$	$3f_1$	$-3f_2$	0	$-e_3$	$-e_3$
e_4	0	0	0	0	0	$-3e_5$	$3e_3$	0	$-3e_1$	$-6h_1-3h_2$	$3f_6$	0	$-3e_4$	0
e_5	0	0	0	0	0	0	0	$-3e_3$	$3e_2$	$-3e_6$	$-3h_1-6h_2$	$3e_4$	0	$-3e_5$
e_6	$-3e_2$	0	0	$3e_5$	0	0	0	$3f_1$	0	0	$-3f_4$	$3h_1-3h_2$	$3e_6$	$-3e_6$
f_1	h_1	$-e_6$	$-2e_2$	$-3e_3$	0	0	0	$2f_3$	f_4	0	0	$3f_2$	$2f_1$	$-f_1$
f_2	f_6	h_2	$2e_1$	0	$3e_3$	$-3f_1$	$-2f_3$	0	$-f_5$	0	0	0	$-f_2$	$2f_2$
f_3	$2f_2$	$-2f_1$	h_1+h_2	$3e_1$	$-3e_2$	0	$-f_4$	f_5	0	0	0	0	f_3	f_3
f_4	$3f_3$	0	$-3f_1$	$6h_1+3h_2$	$3e_6$	0	0	0	0	0	0	$-3f_5$	$3f_4$	0
f_5	0	$-3f_3$	$3f_2$	$-3f_6$	$3h_1+6h_2$	$3f_4$	0	0	0	0	0	0	0	$3f_5$
f_6	0	$3e_1$	0	0	$-3e_4$	$-3h_1+3h_2$	$-3f_2$	0	0	$3f_5$	0	0	$-3f_6$	$3f_6$
h_1	$2e_1$	$-e_2$	e_3	$3e_4$	0	$-3e_6$	$-2f_1$	f_2	$-f_3$	$-3f_4$	0	$3f_6$	0	0
h_2	$-e_1$	$2e_2$	e_3	0	$3e_5$	$3e_6$	f_1	$-2f_2$	$-f_3$	0	$-3f_5$	$-3f_6$	0	0



Engel y Cartan, 1893: grupo de estabilidad del sistema de Pfaff:

$$\left.\begin{aligned} dx_3 + x_1 dx_2 - x_2 dx_1 &= 0 \\ dx_4 + x_3 dx_1 - x_1 dx_3 &= 0 \\ dx_5 + x_2 dx_3 - x_3 dx_2 &= 0 \end{aligned}\right\}$$



Engel, 1900: grupo que preserva una 3-forma genérica:

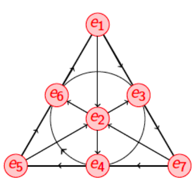
$$\mathrm{Gl}(7,\mathbb{F}) \times \wedge^3(\mathbb{F}^7)^* \to \wedge^3(\mathbb{F}^7)^*,\ f\cdot\Omega(X,Y,Z) = \Omega(f^{-1}X, f^{-1}Y, f^{-1}Z)$$

$$G_\Omega = \{f \in \mathrm{Gl}(V) : f\cdot\Omega = \Omega\} \cong G_2!$$

Una sola órbita en $\mathbb{C}$ y dos en $\mathbb{R}$: $G_{\Omega_c} = \mathfrak{g}_2^c$ y $G_{\Omega_s} = \mathfrak{g}_2^s$

Cartan 1914:

$$\mathbb{O} = \sum_{i=0}^{7} \mathbb{R} e_i$$



$$e_i e_{i+1} = e_{i+3} = -e_{i+1} e_i \pmod 7$$

$$e_0 = 1_{\mathbb{O}}\ \ e_i^2 = -1$$

$$\mathfrak{g}_2^c \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) = \{d\colon \mathbb{O} \to \mathbb{O} \text{ lin} : d(xy) = d(x)y + xd(y)\}$$

Buscando sus elementos:
$D_{x,y} := [L_x, L_y] + [L_x, R_y] + [R_x, R_y], \quad D_{x,y}(z) = [[x,y],z] - 3(x,y,z)$

$$\mathfrak{der}(\mathbb{O}) = \{\sum_i D_{x_i,y_i} : x_i, y_i \in \mathbb{O}\}$$

Y la de las constantes de estructura de arriba $= \mathfrak{g}_2^s \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}_s)$....

Otros modelos: $\mathfrak{g}_2^s = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{R}) \oplus$ vectores fila $\oplus$ vectores columna.

De la compacta muchos menos!

NEW

El álgebra de Lie $\mathfrak{g}_2^{\,c}$ como anillo grupo torcido

$\mathbb{F}$ cuerpo, G grupo $\rightsquigarrow \mathbb{F}[G]=\{\sum \alpha_g g : \alpha_g \in \mathbb{F}, g \in G\}$ álgebra grupo

$\mathbb{O}$ CASI: álgebra grupo torcida $\rightsquigarrow$

$$\mathbb{O}=\mathbb{R}^{\sigma}[\mathbb{Z}_2^3]: \qquad (\sum \alpha_g g)(\sum \beta_h h)=\sum \alpha_g \beta_h \sigma(g,h)gh$$

para $\sigma: \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2^3 \to \mathbb{R}$, $\sigma(g,h)=(-1)^{h_1 g_2 g_3 + g_1 h_2 g_3 + g_1 g_2 h_3 + \sum_{i \le j} g_i h_j}$

cambio $\mathbb{R}$ por $R=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ y σ por $\sigma: \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2^3 \to \mathrm{Bil}(R\times R, R)$

El modelo:

Matrices auxiliares $P=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$ y $\theta=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Anillo $R=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$ con $(a,b)*(a',b')=(aa',bb')$.

Grupo $G=\mathbb{Z}_2^3=\{g_i : i=0\ldots 7\}$ donde

$$\begin{array}{llll} g_0 := (\bar 0,\bar 0,\bar 0), & g_1 := (\bar 1,\bar 0,\bar 0), & g_2 := (\bar 0,\bar 1,\bar 0), & g_3 := (\bar 0,\bar 0,\bar 1),\\ g_4 := (\bar 1,\bar 1,\bar 0), & g_5 := (\bar 0,\bar 1,\bar 1), & g_6 := (\bar 1,\bar 1,\bar 1), & g_7 := (\bar 1,\bar 0,\bar 1). \end{array}$$

Los twists vienen dados por $\sigma_{ij}(r,r')=-\sigma_{ji}(r',r)$ y

$$\begin{aligned} \sigma_{i,i+1}(r,r') &= (r*r'P)\theta P\theta,\\ \sigma_{i,i+2}(r,r') &= (rP*r'\theta P)\theta,\\ \sigma_{i,i+4}(r,r') &= (r\theta P*r')\theta P. \end{aligned}$$

Entonces $\mathcal{L}=R^{\sigma}[G^{\times}]=\left\{\sum_{i=1}^{7} r_i g_i : r_i \in R\right\}\cong \mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}!$,

para el producto:

- $[rg_i, r'g_i]=0$,
- $[rg_i, r'g_j]=\sigma_{ij}(r,r')(g_i+g_j)$ if $i\neq j\in\{1,\ldots,7\}$, $r,r'\in R$.

Alguna ventaja:

- Graduada naturalmente sobre $\mathbb{Z}_2^{\,3}$
- Base ortogonal $\{(4,0)g_i, (0,4)g_i$: i=1...7$\}$ con todos sus elementos semisimples (ad-diagonalizables) y constantes de estructura enteras

	$\mathrm{ad}((1,0)g_i)$	$\mathrm{ad}((0,1)g_i)$
$(a,b)g_i$	0	0
$(a,b)g_{i+1}$	$\frac{1}{4}(a+3b,-a-3b)\,g_{i+3}$	$\frac{1}{4}(3b-3a,b-a)\,g_{i+3}$
$(a,b)g_{i+2}$	$\frac{1}{4}(a-3b,-a-b)\,g_{i+6}$	$\frac{1}{4}(3a-9b,a+b)\,g_{i+6}$
$(a,b)g_{i+3}$	$\frac{1}{4}(3b-a,3b-a)\,g_{i+1}$	$\frac{1}{4}(3a+3b,-a-b)\,g_{i+1}$
$(a,b)g_{i+4}$	$\frac{1}{4}(a-3b,\ a+b)\,g_{i+5}$	$\frac{1}{4}(-3a-3b,b-3a)\,g_{i+5}$
$(a,b)g_{i+5}$	$\frac{1}{4}(-a-3b,a-b)\,g_{i+4}$	$\frac{1}{4}(3a+9b,a-b)\,g_{i+4}$
$(a,b)g_{i+6}$	$\frac{1}{4}(3b-a,\ a+b)\,g_{i+2}$	$\frac{1}{4}(-3a-3b,3a-b)\,g_{i+2}$