

Aplicaciones actuariales de modelos multi-estados y tablas de decrementos múltiples

Antonio Fernández Morales

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga, 2023



Esta obra se encuentra bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada. Puede copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra bajo las condiciones siguientes:

- Reconocimiento: Debe reconocer los créditos de la obra citando al autor.
- No comercial: No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- Sin obras derivadas: No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.

1. Introducción

Los procesos estocásticos basados en cadenas de Markov, tanto en términos discretos como continuos, han sido utilizados con frecuencia en los modelos actuariales de contingencias de vida y supervivencia y en diversas y variadas extensiones, [1]. En particular, los modelos que describen las transiciones entre estados de discapacidad y actividad laboral constituyen herramientas esenciales tanto en el sector privado, como en el sector público en el diseño y provisión de programas de ayudas, para determinar la demanda de dichos programas y proyectar futuros costes de los mismos, [2]. El modelo básico de estados múltiples en este sentido se compone de tres estados relevantes: actividad, incapacidad y fallecimiento, [3]. No obstante, se ha desarrollado una notable cantidad de variantes más complejas con número de estados cada vez más elevado, [4], [5], [6].

Otro modelo que ha experimentado una considerable atención en el sector asegurador es el que conduce a la elaboración de tablas de decrementos múltiples. Estas tablas tienen una gran variedad de aplicaciones en el ámbito actuarial. Resultan de un gran interés para cuantificar los riesgos que causan diversas contingencias y finalizaciones de contratos, lo cual es de vital importancia para gestionar diversas operaciones relacionadas, entre otros, con el negocio de vida, salud o planes de pensiones, [7]. Aplicaciones basadas en la experiencia de las carteras permiten la elaboración de tablas de decrementos múltiples que combinan las finalizaciones de contratos por causa de fallecimiento y de otros motivos exógenos ajenos al control de la compañía de seguros, [8]. Otra de las aplicaciones más comunes consiste en la elaboración de tablas de supervivencia por causas específicas de muerte. Estas tablas de supervivencia con múltiples decrementos se han convertido en una herramienta estándar en el análisis demográfico y actuarial, [9].

En las áreas relacionadas con el análisis de supervivencia, es a menudo necesario, además, contar con técnicas para combinar o fusionar tablas de supervivencia o mortalidad que resulten en tablas de decrementos múltiples y, por otra parte, con técnicas que faciliten el recorrido inverso, [10].

En esta obra se presentan casos de estudio relativos a las aplicaciones actuariales de los modelos de estados múltiples y las tablas de decrementos múltiples, desde una óptica aplicada y con un claro enfoque en las competencias profesionales del sector asegurador, [11], [12], [13], [14], [15]. Para ello, se ha tenido en cuenta el destacado grado de multidisciplinariedad de las mismas [16], [17], [18].

El conjunto de casos y cuestiones de estudio incluidos en esta obra forma parte de una colección más amplia, [19], [20], [21], [22], que puede ser enriquecida con otra serie de recursos digitales orientados a simulación y experimentación con modelos estocásticos de supervivencia, [23], [24], [25], [26], tablas dinámicas, [27], [28], [29], y diversos tipos de procesos estocásticos, [30], [31], [32], [33], [34].

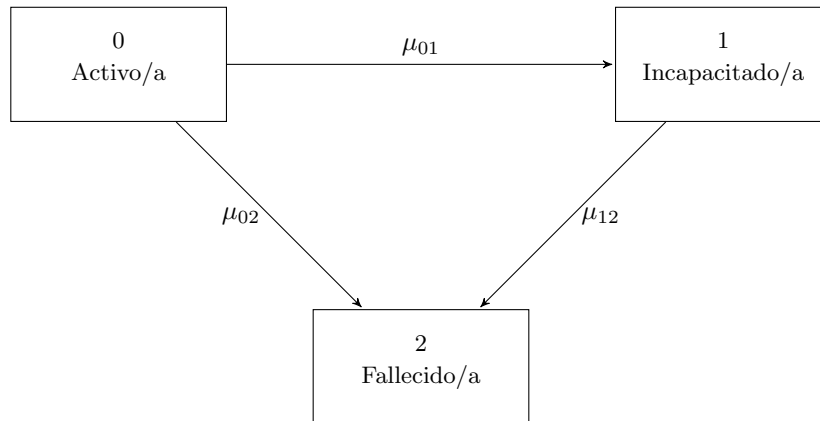
Por último, se ha optado por un formato de utilidad, tanto para elaboración de actividades grupales, [35], como para proyectos individuales, así como para entornos de aprendizaje virtuales [36], [37], [38], [39], que se han revelado de gran utilidad en la etapa de virtualización docente ocasionada por las restricciones derivadas de la COVID-19, [40], [41], [42].

2. Casos de estudio

Caso 1

En el modelo multi-estados representado en la figura, definido por las intensidades de transición siguientes:

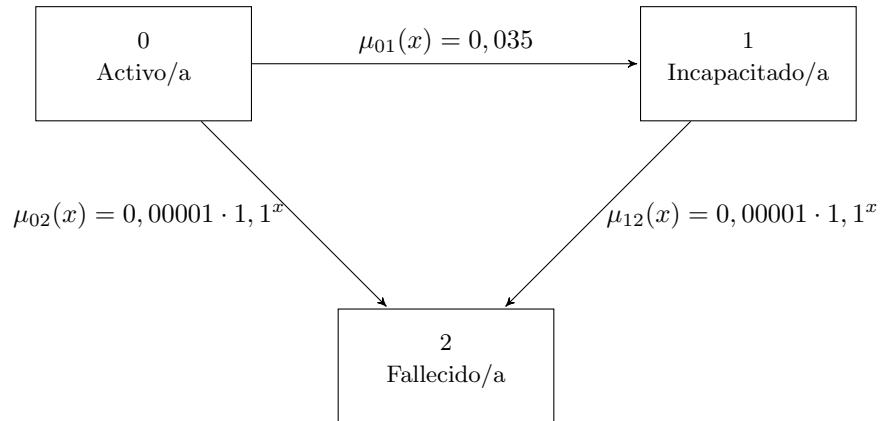
$$\mu_{01} = 0,0025 \quad \mu_{02} = 0,0015 \quad \mu_{03} = 0,0020$$



- Calcule ${}_5p_{50}^{00}$
- Calcule ${}_5p_{50}^{01}$
- Calcule ${}_5p_{50}^{02}$

Caso 2

Se ha estimado un modelo multi-estados con las siguientes características:



- Calcule la probabilidad de que una persona activa con 60 años pase al estado de incapacidad antes de cumplir 65.
- Calcule la probabilidad de que una persona activa con 60 años esté fallecida a los 65 años.

Caso 3

Un modelo de salida múltiple para dos causas de salida, 1 y 2, presenta los tantos instantáneos de salida

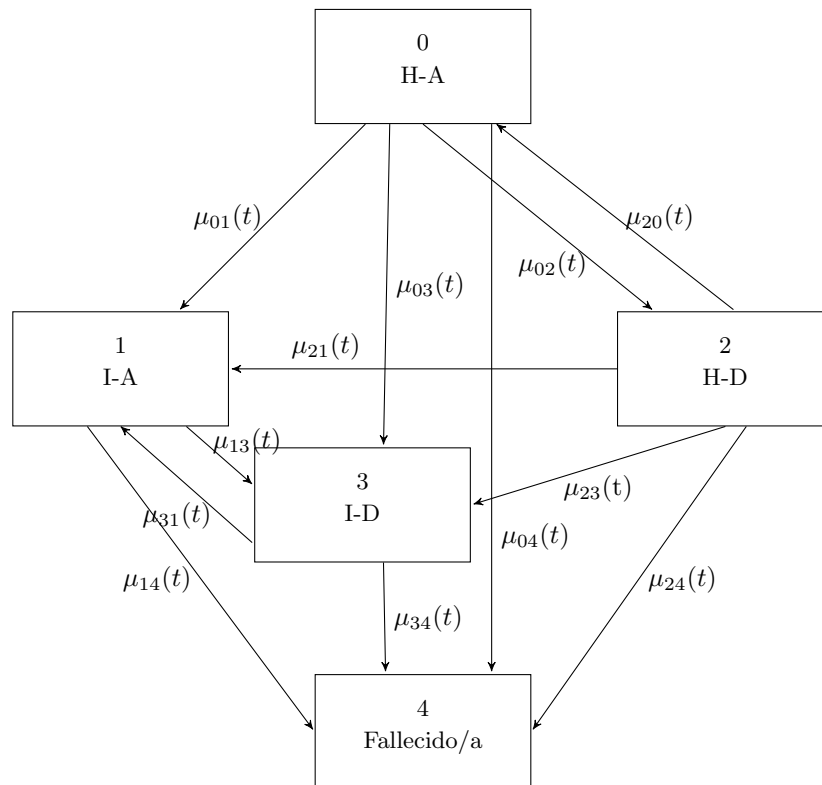
$$\mu_x^{(1)} = 0,05 \quad \mu_x^{(2)} = 0,15$$

Obtener:

- Probabilidad de que una persona salga en 5 años por la causa 1.
- Probabilidad de que una persona se mantenga en el colectivo cinco años.

Caso 4

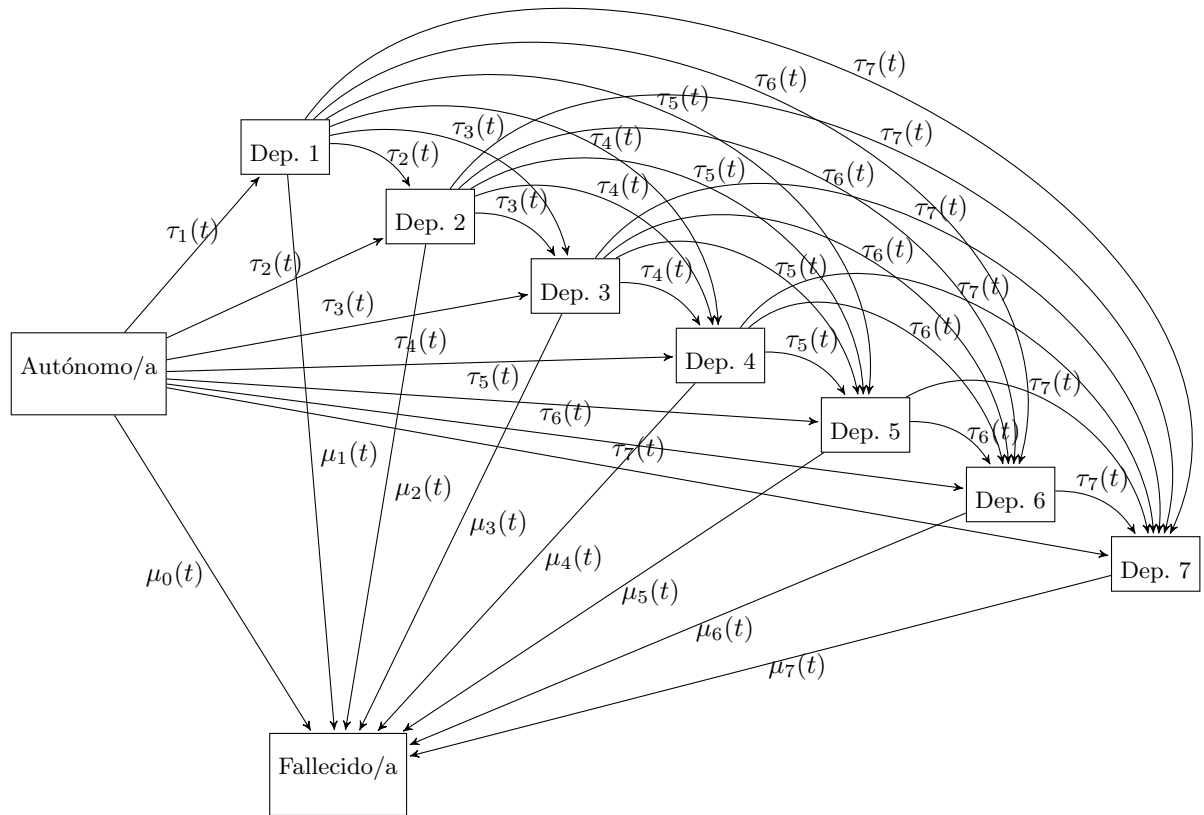
El modelo de múltiples estados del gráfico, elaborado con información del *Health and Retirement Study* (HRS) de la Universidad de Michigan, incorpora discapacidad funcional (A: activo/a, D: discapacidad) y estado de salud (H: sin historial de problemas severos de salud, I: con historial de problemas severos de salud), con el objetivo de facilitar la tarificación de diversos productos de seguros, [43].



- ¿Admite este modelo la reactivación desde los estados con discapacidad funcional?
- ¿Admite este modelo la recuperación del estado de salud sin historial de problemas severos?
- ¿Permite el modelo diferentes mortalidades entre estados de dependencia?

Caso 5

Se ha diseñado y calibrado un modelo de estados múltiples con información disponible en Austria relativa perceptores de prestaciones de *long-term care* (LTC), clasificados en siete grados de dependencia [44], [45], con las intensidades de transición de la figura.



- a) ¿Admite este modelo la reactivación?
- b) ¿Permite el modelo diferentes mortalidades entre estados de dependencia?

Caso 6

En la tabla siguiente aparecen las salidas de un colectivo de contribuyentes a un fondo de pensiones por tres causas diferentes: abandono, muerte y jubilación. Calcular:

- Probabilidad de que una persona del colectivo que acaba de cumplir 60 años se mantenga en el colectivo 5 años más.
- Probabilidad de que una persona del colectivo que acaba de cumplir 60 no esté en el grupo al cumplir los 61.
- Probabilidad de que una persona del colectivo que acaba de cumplir 60 años abandone el fondo antes de cumplir 61 años.
- Probabilidad de que una persona del colectivo que acaba de cumplir 60 años muera antes de cumplir los 61.

Edad	Activos/as	Abandonos	Muertes	Jubilaciones
60	10000	100	71	80
61	9749	90	76	100
62	9483	80	80	120
63	9203	70	85	130
64	8918	60	88	150

Caso 7

A partir del siguiente extracto de una tabla de servicios de una gran empresa, construya las tablas independientes de salida.

Edad	Empleados/as	Abandono del servicio	Muertes en activo	Jubilaciones
61	10000	170	91	80
62	9659	180	96	90
63	9293	190	108	140
64	8855	210	125	180

Caso 8

A partir de las tablas de salida simple siguientes obtener la correspondiente tabla de salida múltiple:

x	l_x^1	l_x^2
50	10000	10000
51	9645	9755
52	8935	9123
53	8121	8450
54	7056	7555

Referencias

- [1] Van Otterloo, S., Alonso-García, J. (2023). A multi-state model for sick leave and its impact on partial early retirement incentives: the case of the Netherlands. *Scandinavian Actuarial Journal* 2023(3), 244-268.
- [2] Naka, P., Boado-Penas, M. C., Lanot, G. (2020). A multiple state model for the working-age disabled population using cross-sectional data. *Scandinavian Actuarial Journal* 2020 (8), 700-717.
- [3] Pitacco, E. (2014). *Health insurance: basic actuarial models*. Cham: Springer International Publishing.
- [4] Ahmad, J., Buchardt, K., Furrer, C. (2022). Computation of bonus in multi-state life insurance. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* , 52(1), 291-331.
- [5] Ramsay, C. M., Oguledo, V. I. (2020). Doubly Enhanced Annuities (DEANs) and the Impact of Quality of Long-Term Care under a Multi-State Model of Activities of Daily Living (ADL). *North American Actuarial Journal* 24(1), 57-99.
- [6] Hariyanto, E. A., Dickson, D. C., Pitt, D. G. (2014). Estimation of disability transition probabilities in Australia I: Preliminary. *Annals of Actuarial Science*, 8(1), 131-155.
- [7] Lee, H., Ha, H., Lee, T. (2021). Decrement rates and a numerical method under competing risks. *Computational Statistics and Data Analysis*, 156, 107125.
- [8] Russo, V., Giacometti, R., Fabozzi, F. J. (2017). Intensity-based framework for surrender modeling in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 72, 189-196.
- [9] Kjærgaard, S., Ergemen, Y. E., Kallestrup-Lamb, M., Oeppen, J., Lindahl-Jacobsen, R. (2019). Forecasting causes of death by using compositional data analysis: The case of cancer deaths. *Journal of the Royal Statistical Society Series C: Applied Statistics*, 68(5), 1351–1370.
- [10] Lee, H., Ahn, J. Y., Ko, B. (2019). Construction of multiple decrement tables under generalized fractional age assumptions. *Computational Statistics and Data Analysis*, 133, 104-119.
- [11] Trigo-Martínez, E., Fernández-Morales, A. (2017). Collaborative projects for developing technological and professional competences in Actuarial Science, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 2767-2772.

- [12] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Moreno-Ruiz, R., Gómez-Pérez-Cacho, O. (2019). Involving professionals in curricular activities for developing actuarial skills. *INTED2019 Proceedings*, pp. 9113-9117, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2267>
- [13] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2018). Coordination, transversality and professional skills in actuarial education. *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2714-2719, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1601>
- [14] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A., Moreno-Ruiz, R. (2020). Actions for the contextualization and development of professional competences. *12th Annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5379-5385. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1417>
- [15] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A., Gómez Pérez-Cacho, O., Trigo-Martínez, E., Moreno-Ruiz, R., Cisneros-Martínez, J.D., Lacomba-Arias, B. (2023). Integrating social inclusion, gender perspective and sustainability into the skills development process in higher education. *15th annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN23 Proceedings*, pp. 5487-5493. doi: <https://doi.org/10.21125/edulearn.2023.1443>
- [16] Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. (2020). Multidisciplinary collaborative projects for a more coordinated Actuarial Education. *12th annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN20 Proceedings*, pp. 5409-5414. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2020.1424>
- [17] Fernández Morales, A., Mayorga Toledano, M.C. (2013). Developing Creativity and Innovation through Collaborative Projects. *Interdisciplinary Studies Journal* 2(3), 70-82.
- [18] Mayorga Toledano, M. C. (2021). Limitaciones legales de la analítica predictiva y el big data en el ámbito asegurador. *Derecho de seguros: nuevas realidades y nuevos retos*. Marcial Pons, 313-327.
- [19] Fernández Morales, A. (2023). Aplicaciones actuariales de graduación paramétrica de tablas de supervivencia y mortalidad. Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA), Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/28019>.

- [20] Fernández Morales, A. (2022). Casos de estudio de estimación de modelos de supervivencia para Ciencias Actuariales. Repositorio Institucional de la Universidad de Málaga (RIUMA), Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/25644>.
- [21] Fernández-Morales, A. (2022). Casos de estudio de tablas de mortalidad y supervivencia para Ciencias Actuariales. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/25501>.
- [22] Fernández-Morales, A. (2022). Casos de estudio de modelos de supervivencia para Ciencias Actuariales. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/25377>.
- [23] Fernández-Morales, A. (2011). Learning survival models with on-line simulation activities in the Actuarial Science Degree. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, Vol. 6, no. 1, pp. 15–19.
- [24] Fernández-Morales, A. (2017). Simulating lifetimes with actuarial survival models. *9th International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN17 Proceedings*, pp. 725-731, Valencia: IATED, 2017. <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2017.1161>
- [25] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2021). Using an on-line interactive graphical simulator to experiment with late-life mortality models. *115th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings*, pp. 9656-9662.
- [26] Fernández-Morales, A. (2020). Micro simulación de modelos de supervivencia en edades avanzadas para Ciencias Actuariales. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/20543>.
- [27] Fernández-Morales, A. (2021). Tablas actuariales de supervivencia y mortalidad dinámicas con hoja de cálculo. RIUMA, Universidad de Málaga, <https://hdl.handle.net/10630/23265>.
- [28] Fernández-Morales, A. (2016). Tablas de mortalidad dinámicas con hoja de cálculo en la práctica actuarial. RIUMA, Universidad de Málaga, <http://hdl.handle.net/10630/10922>.
- [29] Fernández-Morales, A. (2016). Tutorial para la construcción de tablas de mortalidad dinámicas PERM/F 2000 con hoja de cálculo. RIUMA, Universidad de Málaga, <http://hdl.handle.net/10630/5682>.
- [30] Fernández-Morales, A. (2017). Enriching the statistics learning experience with D3.js interactive animations: Insurance applications of Markov chains. *International Journal of Educational Research and Innovation*, vol. 7, pp. 25-39, 2017. URI: <http://hdl.handle.net/10433/4923>

- [31] Fernández-Morales, A. (2015). Application of a Discrete-time Markov Chain Simulation in Insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science & IT*, vol.3, no.3, pp. 27-32, 2015. doi: <http://dx.doi.org/10.3991/ijes.v3i3.4929>
- [32] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2019). Enhancing Actuarial education with interactive online resources. *13th International Technology, Education and Development Conference, INTED2019 Proceedings*, pp. 9139-9145, 2019. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/inted.2019.2270>
- [33] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2017). Interactive resources based on serious gaming for Actuarial Education, *EDULEARN17 Proceedings, 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, Valencia: IATED, pp. 3245-3251.
- [34] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2018). Using serious games un Higher Education. An Application in actuarial studies. *11th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2018 Proceedings*, pp. 2727-2734, Sevilla: IATED. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/iceri.2018.1603>
- [35] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A., Trigo-Martínez, E., Gómez Pérez-Cacho, O. (2023) A new model of integrated final master project in Actuarial Science. *15th annual International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN23 Proceedings*, pp. 5410-5415. doi: <http://dx.doi.org/10.21125/edulearn.2023.1422>
- [36] Mayorga-Toledano, M. C., Trigo-Martínez, E., Fernández-Morales, A. (2022). Assessing the students' prospective perceptions of the final master project in Actuarial Science. *15th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2022 Proceedings*. Sevilla: IATED, 2877-2882.
- [37] Mayorga-Toledano, M. C. (2010). Integrating e-learning activities in the teaching and learning of banking and securities market law. *Education and Law Review*, vol. 1, pp. 177-196.
- [38] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2004). Learning tools for java enabled phones. An application for actuarial studies. In *Learning with mobile devices. Research and Development* (J. Attewell, C. Savill-Smith, cords.), London: Learning and Skills Development Agency, pp. 95-98.
- [39] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2010). Using iPhone Web-Apps to Enhance Learning and Teaching in Actuarial Education, In *Mobile Learning: Pilot Projects and Initiatives* (R. Guy, ed.), Santa Rosa: Informing Science Press, pp. 83-104.

- [40] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2020). Assessing the face-to-face to virtual learning adaptation process of the MSc in Actuarial Science at the University of Malaga. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6232-6240.
- [41] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2020). Using COVID19 outbreak data to engage students in the learning process. *13th International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings*, pp. 6205-6211.
- [42] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2021). Students' perceptions of the teaching and learning mode adopted in the MSc in Actuarial Science at the University of Malaga during COVID-19 first wave. *115th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings*, pp. 9650-9655.
- [43] Sherris, M., Wei, P. (2021). A multi-state model of functional disability and health status in the presence of systematic trend and uncertainty. *North American Actuarial Journal*, 25(1), 17-39.
- [44] Fleischmann, A. (2015). Calibrating intensities for long-term care multiple-state Markov insurance model. *European Actuarial Journal*, 5, 327-354.
- [45] Fleischmann, A., Hirz, J., Sirianni, D. (2022). A long-term care multi-state Markov model revisited: a Markov chain Monte Carlo approach. *European Actuarial Journal* 12 (1), 215-247.