

# El principio de los trabajos virtuales en estructuras de nudos articulados. Aplicaciones.

## 1. INTRODUCCIÓN

El tema que se va a desarrollar es el Principio de los Trabajos Virtuales (en adelante P.T.V.) así como sus aplicaciones en su formulación para estructuras de nudos articulados con cargas en los nudos. Se trata de un tema de gran trascendencia no ya sólo por la utilidad que presenta en sí, sino por la cantidad de aplicaciones que tiene en todo el campo de la mecánica de medios continuos en general y la teoría de estructuras en particular.

Para empezar es interesante recordar el P.T.V. formulado para problemas de equilibrio estático de sólidos rígidos. Con él es posible establecer ecuaciones alternativas a las de equilibrio de fuerzas y momentos, haciendo uso de sistemas virtuales de movimientos del sólido rígido, adecuadamente escogidos de manera que permitieran una resolución más directa y rápida en función de la incógnita requerida.

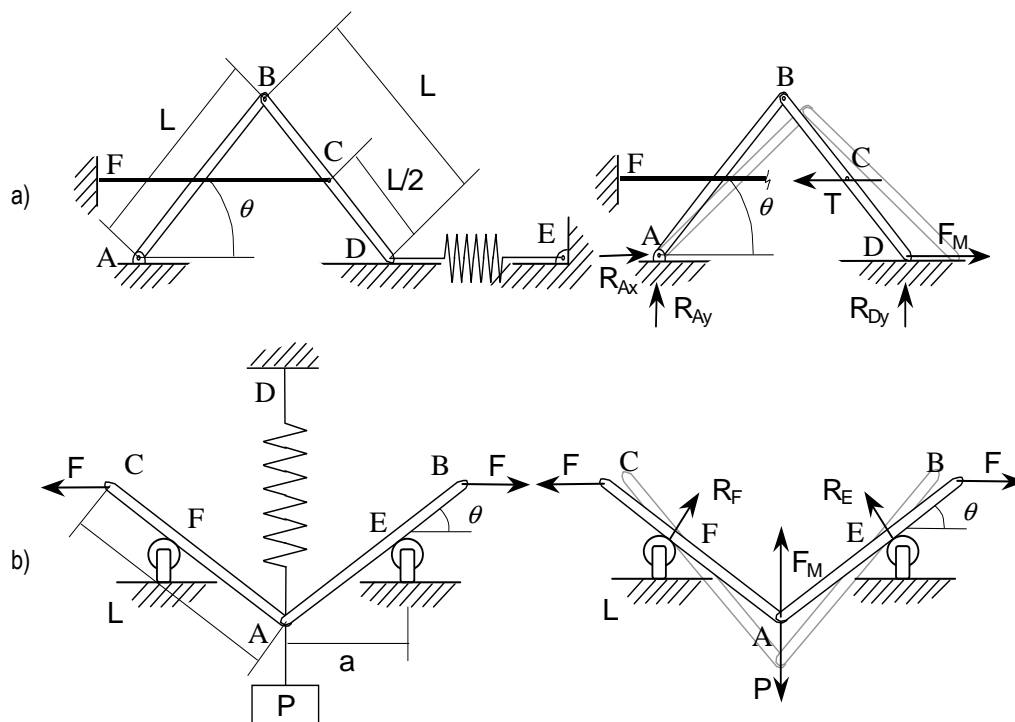


Figura 1. Aplicación del P.T.V. en mecánica del sólido rígido

En la figura 1 podemos observar dos de estas aplicaciones a modo de recordatorio. En el problema de la figura 1.a, en el que se nos pide la tensión del cable FC en el equilibrio según las condiciones preestablecidas del muelle, la resolución del mismo por medio del planteamiento de las ecuaciones de equilibrio de fuerzas obligaría, de manera inevitable, a la introducción de una serie de incógnitas, las

reacciones  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  y  $R_{Dy}$ , que en ningún momento nos pide el problema. Tanto el equilibrio de fuerzas horizontal como vertical hace intervenir a alguna de ellas siendo además imposible encontrar un punto en torno al que aplicar equilibrio de momentos de manera que no aparezcan dichas reacciones.

Sin embargo, la aplicación del P.T.V. entre el sistema de desplazamientos virtuales que se muestra en la misma figura y el sistema de fuerzas real, permite obtener una única ecuación en la que solamente intervienen la tensión del cable  $T$  y la fuerza del muelle  $F_M$  puesto que estas dos son las únicas fuerzas que producen trabajo con dichos desplazamientos.

Para ello necesitamos saber las expresiones del desplazamiento horizontal virtual de los puntos C y D. Por ser el punto C el punto medio de la barra BD y por ser ambas barras iguales se puede deducir fácilmente que el desplazamiento horizontal de D es  $4/3$  el de C:

$$dx_D = \frac{4}{3} dx_C$$

Recordando la expresión del P.T.V. para sólidos rígidos tenemos:

$$\sum \vec{F} \cdot \vec{u}^* = 0$$

Donde los vectores de fuerzas ( $\vec{F}$ ) son las reales y los vectores desplazamiento ( $\vec{u}^*$ ) corresponden a los virtuales. Si aplicamos dicha expresión nos queda:

$$-T dx_C + F_M dx_D = 0$$

$$-T dx_C + F_M \frac{4}{3} dx_C = 0$$

$$T = \frac{4}{3} F_M$$

Y por tanto, de manera muy sencilla, al haber escogido un sistema virtual de desplazamientos adecuado, tenemos el valor de la tensión del cable por medio de una única ecuación. El valor de  $F_M$ , como es obvio, es conocido en función de la posición del sistema de barras (en términos del ángulo  $\theta$ ) y de la constante del muelle y sus condiciones iniciales sin tensión.

El problema de la figura 1.b es otra muestra del mismo procedimiento de trabajo con la única diferencia de que las operaciones son ligeramente más complejas y se deben obtener los desplazamientos virtuales derivando las expresiones de las posiciones de cada punto respecto al parámetro  $\theta$  escogido para ello.

Se pide en este caso determinar la fuerza  $F$  que hay que ejercer para mantener el equilibrio en una determinada posición. El procedimiento en esta ocasión sería la aplicación de un desplazamiento virtual, tal y como se muestra en la misma figura, a continuación, la definición de la posiciones de los puntos sobre los que actúan las fuerzas que producen trabajo para, a partir de ellas, obtener los desplazamientos virtuales y aplicar el P.T.V.

Veamos el procedimiento a seguir, en primer lugar obtenemos los desplazamientos virtuales habiendo fijado un sistema de referencia coherente ( $x$  positivo a la derecha e  $y$  positivo hacia arriba):

$$x_B = L \cos \theta; \quad dx_B = -L \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$x_C = -L \cos \theta; \quad dx_C = L \operatorname{sen} \theta d\theta$$

$$y_A = -a \operatorname{tg} \theta; \quad dy_A = \frac{-a}{\cos^2 \theta} d\theta$$

Ahora aplicamos el P.T.V.:

$$-F dx_C + F dx_B + (F_M - P) dy_A = 0$$

$$-2FL \operatorname{sen} \theta d\theta + (F_M - P) \left( \frac{-a}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = 0$$

$$F = (P - F_M) \frac{a}{2L \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta}$$

De nuevo con todo ello se evita hacer intervenir en los cálculos fuerzas no pedidas (las reacciones) obteniendo de manera ágil el resultado requerido.

Es interesante destacar la potencialidad del P.T.V. como herramienta de cálculo ya que al permitir definir infinitos desplazamientos virtuales siempre podremos encontrar alguno que nos ayude a resolver los problemas de forma directa y rápida. Para confirmarlo podemos terminar este repaso de los conocimientos ya adquiridos analizando la aplicación a un problema de cálculo de reacciones de una estructura isostática pero externamente hiperestática. Es el caso de la estructura de la figura 2, una viga continua con tres apoyos y una rótula en mitad del segundo vano. Pretender calcular las reacciones por medio de ecuaciones de equilibrio de fuerzas nos llevaría a tener que realizar alguna sección en la viga (a nivel de la rótula sería lo aconsejable) y con ello introducir como incógnitas adicionales las fuerzas internas que aparecen en ese corte.

Si en lugar de ello se libera uno de los apoyos para poder aplicar un desplazamiento virtual, tal y como se muestra en la figura, es posible establecer el P.T.V. de manera que obtenemos una ecuación cuya única incógnita es la reacción del apoyo liberado, puesto que las otras dos no realizan trabajo (virtual).

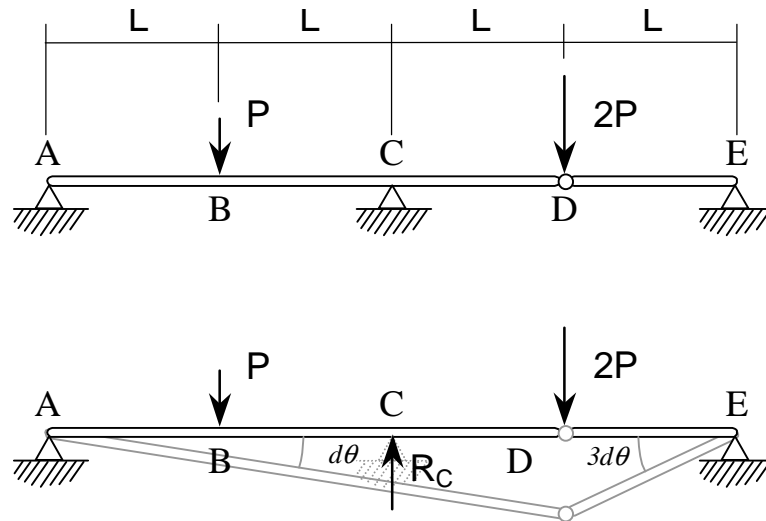


Figura 2. Cálculo de reacción hiperestática con P.T.V.

Por tanto tendríamos:

$$Pdy_B - R_C dy_C + 2Pdy_D = 0$$

$$PLd\theta - R_C 2Ld\theta + 2P3Ld\theta = 0$$

$$R_C = \frac{7}{2}P$$

Escogiendo de manera similar otros dos sistemas virtuales de desplazamientos podríamos calcular de igual manera las otras dos incógnitas si así lo deseamos (aunque, indudablemente, conocida una de ellas ya es sencillo aplicar equilibrio de fuerzas y momentos para despejar las otras dos).

Una vez recordado esto podemos decir que, en este punto, es conocida la metodología necesaria para el cálculo de las reacciones y esfuerzos en cualquier estructura articulada que sea isostática a partir de las ecuaciones de equilibrio. Sin embargo, para poder seguir adelante, ya sea con el cálculo de desplazamientos de estas mismas estructuras o para la resolución completa de estructuras hiperestáticas, nos encontramos con la necesidad de imponer ecuaciones de compatibilidad.

La formulación analítica de este tipo de ecuaciones presenta, de manera general, una apreciable dificultad. Los métodos gráficos (es el caso del diagrama de Williot, para el cálculo de desplazamientos) son una ayuda en algunos casos en los que aplicando geometría se puede tratar de obtener expresiones que de manera simplificada aporten una solución. Sin embargo, en general, obtener expresiones analíticas a partir de condiciones geométricas no deja de ser una labor compleja.

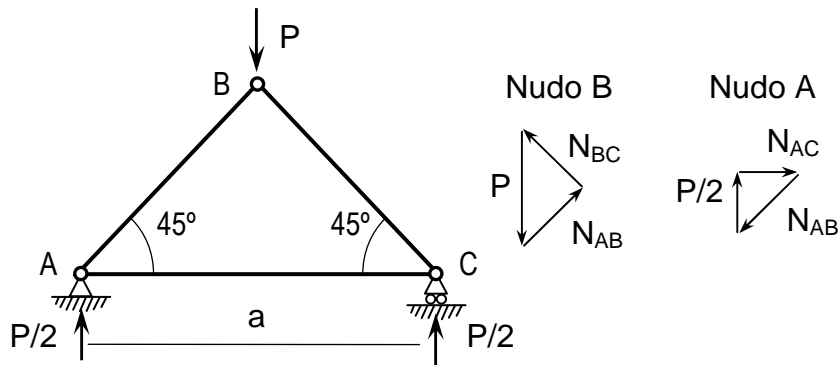


Figura 3. Estructura triangular de nudos articulados

Para constatar este hecho no tenemos más que tratar de obtenerlas para la estructura de nudos articulados más sencilla que existe, el triángulo. En la figura 3 se muestra ésta y la resolución gráfica por el método de los nudos para el cálculo de los esfuerzos axiales en las barras:

$$N_{BC} = N_{AB} = P \cos 45 = \frac{P}{\sqrt{2}} \quad \text{a compresión}$$

$$N_{AC} = N_{AB} \cos 45 = \frac{P}{2} \quad \text{a tracción}$$

En este caso, no se han puesto signos a los esfuerzos por coherencia con la representación gráfica del diagrama de equilibrio de los nudos en la figura 3, tan solo se ha indicado cual trabaja a compresión y cual a tracción. De manera general, suele ser común utilizar un criterio de signos de forma que las tracciones se representen como positivas y las compresiones negativas, en adelante usaremos este convenio, tanto en esfuerzos como en alargamientos de barras. Por tanto los esfuerzos serán:

$$N_{BC} = N_{AB} = -\frac{P}{\sqrt{2}}$$

$$N_{AC} = \frac{P}{2}$$

A partir de ellos se puede, directamente, obtener los alargamientos de las barras. Sabiendo que:

$$\Delta L = \frac{NL}{AE}$$

$$\Delta L_{AB} = \Delta L_{BC} = -\frac{Pa}{2AE}$$

$$\Delta L_{AC} = \frac{Pa}{2AE}$$

Si ahora pretendemos calcular los desplazamientos de los nudos necesitamos hacer uso de ecuaciones o condiciones de compatibilidad. Podemos ver que, para el nudo C, ello no supone problema ya que las condiciones son sencillas, el desplazamiento vertical es nulo y el movimiento horizontal coincide con el alargamiento de la barra AC.

$$u_{Cx} = \Delta L_{AC} = \frac{Pa}{2AE}; \quad u_{Cy} = 0$$

Sin embargo, para el nudo B ya no es tan simple, para hacerlo con precisión deberíamos evaluar en que punto del espacio se produce la intersección de las barras que poseen unas longitudes distintas a las iniciales (se han acortado) y que además su origen puede ser distinto por los movimientos de los nudos de partida (nudo C en la barra BC). Ello supondría realizar la intersección de dos circunferencias, operación que no es fácil de hacer analíticamente.

Basándonos en la hipótesis de pequeños desplazamientos podemos simplificar esta operación (es la base del diagrama de Williot para el cálculo de desplazamientos) tal y como se muestra en la figura 4.

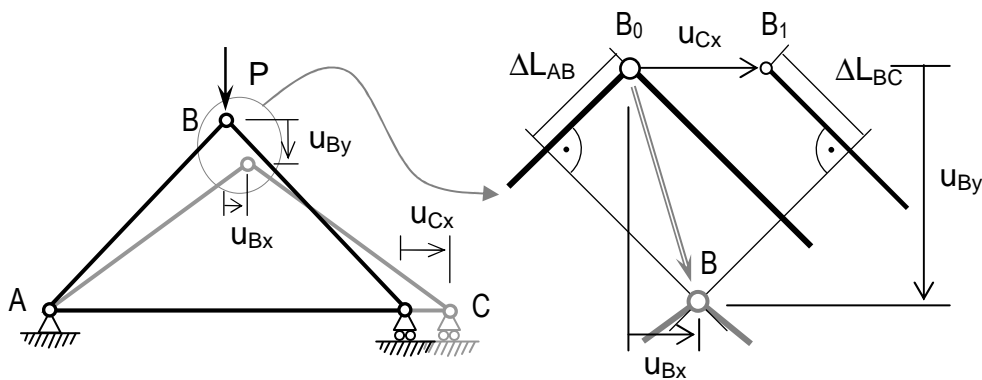


Figura 4. Desplazamiento de los nudos

Con ello establecemos unas relaciones geométricas que transformamos en expresiones analíticas que se corresponderán con las ecuaciones de compatibilidad en este caso y que nos permitirán calcular los desplazamientos requeridos:

$$u_{Bx} = \frac{Pa}{4AE}; \quad u_{By} = -\frac{Pa(2\sqrt{2}+1)}{4AE}$$

Como salta a la vista, este no resulta ser un procedimiento apropiado para el caso general de estructuras con mayor número de barras, por lo que se hace necesario encontrar otra manera más cómoda de imponer estas condiciones.

Como más adelante se verá, el P.T.V. nos aporta una herramienta de gran utilidad, al permitirnos establecer muchas posibles ecuaciones de compatibilidad, de manera sencilla y ágil, de forma que podamos encontrar aquella que más directamente nos lleve a la solución buscada.

En este sentido no debemos olvidar la existencia de diversos teoremas energéticos (Engesser, Castigliano...) que nos permiten también obtener estas ecuaciones de compatibilidad. Sin embargo, este tema se centra en la metodología de aplicación del P.T.V. por ser de mayor generalidad que los métodos anteriores y carecer de algunas de las limitaciones de estos.

Por último, antes de dar comienzo al desarrollo del método, es bueno recalcar la potencialidad de este principio de gran aplicación a muchos otros problemas además de al equilibrio del sólido rígido y a las estructuras de nudos articulados. Podemos indicar su utilización para la resolución de problemas en estructuras de nudos rígidos, para el cálculo de líneas de influencia, el cálculo plástico, la formulación matricial de diversos problemas de medios continuos, el M.E.F., etc.

## 2. EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES: DESARROLLO

Para la obtención del P.T.V. en estructuras de nudos articulados partiremos del desarrollo del mismo aplicado a una única barra articulada, su extensión a un número finito de barras que forman la estructura nos proporcionará la expresión buscada.

Consideremos, por tanto, el caso más general de una barra, de longitud  $L$ , articulada en sus extremos, sometida a acciones externas únicamente en su dirección axial (figura 5), ya sean puntuales en sus extremos (cargas  $P_0$  y  $P_L$ ) o en forma de función de carga distribuida a lo largo de su longitud ( $p(s)$ ).

Si de esta barra extraemos un elemento diferencial  $ds$  y aplicamos condiciones de equilibrio de fuerzas tendremos:

$$p(s)ds + N + \frac{dN}{ds} ds - N = 0$$

$$p(s) + \frac{dN}{ds} = 0$$

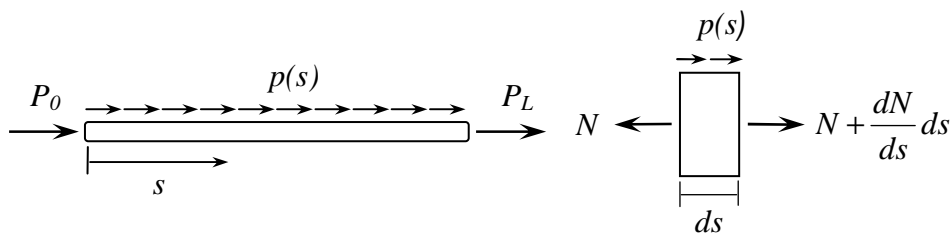


Figura 5. Barra articulada y sección diferencial

Si ahora suponemos una función cualquiera  $\psi(s)$ , que denominaremos función de desplazamientos, que cumpla la condición de ser continua, podemos, al multiplicar la expresión anterior por  $\psi(s)$ , plantear la siguiente ecuación:

$$\psi(s) \left( p(s) + \frac{dN}{ds} \right) = 0$$

Que si integramos a lo largo de la longitud de la barra debe seguir teniendo valor nulo, quedándonos por tanto:

$$\int_0^L p(s) \psi(s) ds + \int_0^L \frac{dN}{ds} \psi(s) ds = 0$$

Integrando por partes el segundo término, tendremos:

$$u = \psi(s) \quad du = \frac{d\psi(s)}{ds} ds$$

$$dv = \frac{dN}{ds} ds \quad v = N(s)$$

$$\int_0^L p(s) \psi(s) ds + [N(s) \psi(s)]_0^L - \int_0^L N(s) \frac{d\psi(s)}{ds} ds = 0$$

Y puesto que  $P_0 = -N(0)$  y  $P_L = N(L)$ :

$$\int_0^L p(s) \psi(s) ds + [P_L \psi(L) + P_0 \psi(0)] = \int_0^L N(s) \frac{d\psi(s)}{ds} ds$$

Esta ecuación, que podemos considerar la expresión del P.T.V. aplicado a la barra articulada, si consideramos la función  $\psi(s)$  como una función de movimientos y sus derivadas como deformaciones, nos está expresando una igualdad entre el trabajo realizado por unas cargas exteriores sobre la barra y la energía de deformación absorbida por ella. Con la particularidad importante de que la función  $\psi(s)$  puede ser cualquiera siempre que cumpla la condición de continuidad.

Si este principio básico lo extendemos a una estructura compuesta por un número determinado de barras obtenemos el siguiente sumatorio:

$$\sum_{barras} \left( \int_0^L p(s) \psi(s) ds + [P_L \psi(L) + P_0 \psi(0)] \right) = \sum_{barras} \int_0^L N(s) \frac{d\psi(s)}{ds} ds$$



Con objeto de simplificarlo un poco y puesto que, en los casos generales de cálculo, las fuerzas externas únicamente se aplican en los nudos, podemos decir que  $p(s) = 0$ , lo cual trae como consecuencia que podamos eliminar la primera integral de la expresión así como que la función del esfuerzo axial pase a ser constante:  $N(s) = N$ . Con ello nos queda la siguiente expresión:

$$\sum_{\text{barras}} [P_L \psi(L) + P_0 \psi(0)] = \sum_{\text{barras}} N \int_0^L \frac{d\psi(s)}{ds} ds$$

En la cual podemos destacar que la integral que queda en el segundo miembro da como resultado el alargamiento total de cada barra:

$$\int_0^L \frac{d\psi(s)}{ds} ds = \Delta L^*$$

Donde el asterisco trata de significar que no tiene que ser el alargamiento real de la barra sino el correspondiente a la función  $\psi(s)$  de desplazamientos. Con ello la expresión se simplifica quedando:

$$\sum_{\text{barras}} [P_L \psi(L) + P_0 \psi(0)] = \sum_{\text{barras}} N \cdot \Delta L^*$$

Igualmente podemos decir que  $P_0 = -N$  y  $P_L = N$ , aunque por claridad en la exposición sigamos manteniendo la notación anterior.

Si observamos la figura 6.a, veremos que, en una barra cualquiera orientada en el plano un ángulo  $\theta$ , las cargas en los extremos, pueden ser expresadas en forma de vector, con componentes según los ejes  $x$  e  $y$ , de tal modo que:

$$\begin{aligned} \vec{P}_0 &= P_{0x} \vec{i} + P_{0y} \vec{j} \\ \vec{P}_L &= P_{Lx} \vec{i} + P_{Ly} \vec{j} \end{aligned}$$

De la misma manera tendríamos los vectores  $\vec{\psi}_0$  y  $\vec{\psi}_L$ :

$$\begin{aligned} \vec{\psi}_0 &= \psi_{0x} \vec{i} + \psi_{0y} \vec{j} \\ \vec{\psi}_L &= \psi_{Lx} \vec{i} + \psi_{Ly} \vec{j} \end{aligned}$$

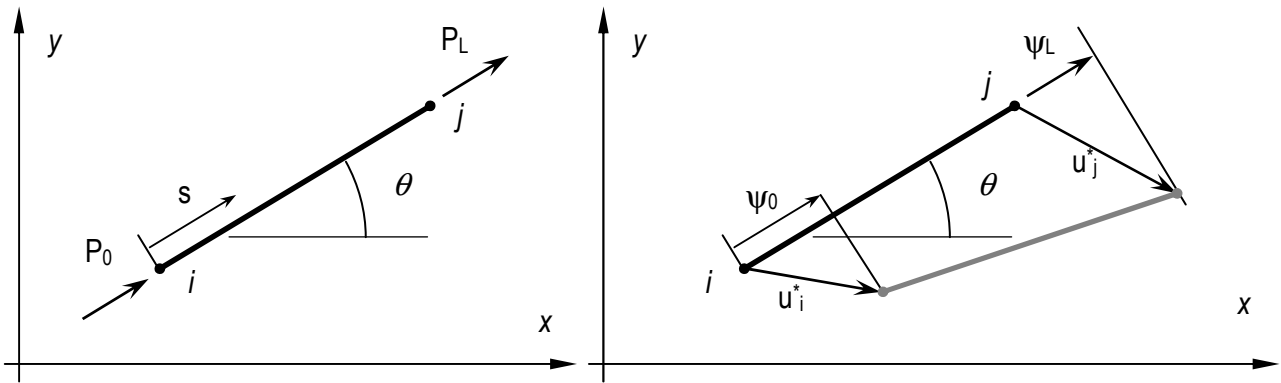


Figura 6. a) Barra orientada en el plano; b) Vectores de desplazamiento

Según ello la expresión podría reescribirse

$$\sum_{barras} [\bar{P}_L \bar{\psi}_L + \bar{P}_0 \bar{\psi}_0] = \sum_{barras} N \cdot \Delta L^*$$

Si observamos la figura 6.b en la que se representan los vectores de desplazamiento de los nudos  $\vec{u}_i^*$  y  $\vec{u}_j^*$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i^* &= u_{ix}^* \vec{i} + u_{iy}^* \vec{j} \\ \vec{u}_j^* &= u_{jx}^* \vec{i} + u_{jy}^* \vec{j} \end{aligned}$$

podemos ver que el vector  $\bar{\psi}_0$  es la proyección en la dirección de la barra del vector  $\vec{u}_i^*$ , por lo que podemos sustituir el producto escalar de la manera siguiente

$$\bar{P}_0 \bar{\psi}_0 = \bar{P}_0 \vec{u}_i^*$$

$$\sum_{barras} [\bar{P}_L \vec{u}_j^* + \bar{P}_0 \vec{u}_i^*] = \sum_{barras} N \cdot \Delta L^*$$

Donde de nuevo se indica por medio del asterisco que los desplazamientos de los nudos no tienen porque ser los reales, sino que corresponderían a los producidos en la estructura por las distintas funciones  $\psi(s)$  de cada barra. Al imponer la igualdad de desplazamientos en un nudo de dicha función para todas las barras que en él confluyen, estamos imponiendo la condición de compatibilidad para toda la estructura. Si desarrollamos el sumatorio en barras y separamos los términos del producto escalar, podemos agrupar las fuerzas sobre las barras que concurren en un mismo nudo:

$$\begin{aligned}\bar{P}_L \bar{u}_j^* &= P_{Lx} u_{jx}^* + P_{Ly} u_{jy}^* \\ \bar{P}_0 \bar{u}_i^* &= P_{0x} u_{ix}^* + P_{0y} u_{iy}^*\end{aligned}$$

$$\sum_{\text{barras}} [\bar{P}_L \bar{u}_j^* + \bar{P}_0 \bar{u}_i^*] = \sum_{\text{nudos}} [(\sum P_x)_i u_{ix}^* + (\sum P_y)_i u_{iy}^*]$$

Puesto que las fuerzas internas que concurren en un nudo deben de estar en equilibrio debe cumplirse:

$$\sum_{\text{nudo } i} P_x = F_{ix}$$

$$\sum_{\text{nudo } i} P_y = F_{iy}$$

Donde  $F_{ix}$  y  $F_{iy}$  son las resultantes de las fuerzas externas que actúan en el nudo  $i$ . Sustituyendo ahora en la ecuación anterior y volviendo a la expresión general, tendremos finalmente:

$$\sum_{\text{nudos}} [F_{ix} u_{ix}^* + F_{iy} u_{iy}^*] = \sum_{\text{barras}} N \cdot \Delta L^*$$

Que es la formulación del P.T.V. para estructuras articuladas con cargas en los nudos. De nuevo podemos enunciar que el trabajo (virtual) realizado por las cargas externas es igual al absorbido por las barras en su deformación, siempre y cuando se mantengan las condiciones de carga y esfuerzo durante la deformación. Donde es muy importante destacar que se trata de un sistema cualquiera de fuerzas y esfuerzos en equilibrio (que en adelante denominaremos sistema de fuerzas) y un sistema cualquiera de movimientos y deformaciones compatible (que igualmente llamaremos sistema de movimientos).

### 3. POSIBILIDADES DE APLICACIÓN DEL P.T.V.

La expresión obtenida para el P.T.V. es, por tanto, una relación matemática entre un sistema de fuerzas en equilibrio (cargas externas en nudos y esfuerzos internos en barras, axiles) y un sistema de movimientos compatible (desplazamientos de nudos y alargamientos de barras) que debe cumplirse, tal y como ha quedado demostrado, para toda estructura articulada sean cuales sean estos sistemas, lo que redundará en la gran utilidad y aplicación de este principio.

Tanto el sistema de fuerzas como el de desplazamientos pueden ser reales ó inventados (virtuales), por ello en principio tenemos varias maneras de combinar dichos sistemas:

#### ***Sistema de fuerzas real con sistema de desplazamientos real.***

Aunque realmente no tiene gran utilidad, en este caso el P.T.V. estaría sirviendo para demostrar el principio físico de conservación de la energía de la estructura sometida a un estado de cargas

que le produce unos movimientos y unas deformaciones determinadas y únicas. Proporcionando una única expresión.

### ***Sistema de fuerzas real con sistema de desplazamientos virtual.***

Al poder escoger nosotros el sistema virtual de desplazamientos podemos establecer relaciones entre las fuerzas y esfuerzos reales de la manera que mejor nos convenga. Es un método para establecer ecuaciones de equilibrio tal y como se vio en la introducción para el caso de aplicación a la mecánica del sólido rígido. Salvo casos como el ejemplo de la figura 2, no tiene especial interés para la resolución de estructuras de nudos articulados puesto que existen métodos sencillos y extendidos que nos permiten establecer ecuaciones de equilibrio y resolverlas de manera rápida y simple (nudos, Ritter, Henneberg...).

### ***Sistema de fuerzas virtual con sistema de desplazamientos real.***

Permite relacionar sistemas de fuerzas inventados con sistemas de desplazamientos reales. Al establecer relaciones a nivel de deformaciones y movimientos reales de la estructura nos está proporcionando ecuaciones de compatibilidad analíticas de manera muy efectiva y sencilla. Ello dependerá tan solo de nuestra capacidad para escoger convenientemente sistemas de fuerzas virtuales que nos permitan obtener las expresiones más simples posibles. Es esta sin duda alguna la gran potencialidad del P.T.V. en el caso que nos ocupa permitiendo, como se verá a continuación, tanto el cálculo de desplazamientos de nudos en estructuras isostáticas como el cálculo completo de estructuras hiperestáticas internas y externas.

### ***Sistema de fuerzas virtual con sistema de desplazamientos virtual.***

Es la última combinación posible que, como resulta obvio, se trata de un caso que, aún cumpliéndose la relación que establece, carece absolutamente de utilidad práctica.

Además de estas posibles aplicaciones hay que destacar que en ningún momento del desarrollo del principio se ha hecho consideración alguna respecto a las leyes de comportamiento de la barra, permitiéndose relaciones no lineales. Esto puede resultar de interés en ciertas aplicaciones aunque, como es común, en este curso de cálculo de estructuras una de las hipótesis realizadas es la de comportamiento lineal elástico.

En los dos siguientes apartados se desarrollarán las aplicaciones más importantes del P.T.V. a estructuras articuladas, esto es, como medio para obtener ecuaciones de compatibilidad que permitan calcular desplazamientos en nudos o resolver estructuras hiperestáticas.

Junto a la explicación de los procedimientos a seguir se acompañan varios ejemplos que los aclaran y complementan para diversos casos de carga.

#### 4. CÁLCULO DE DESPLAZAMIENTOS EN ESTRUCTURAS ISOSTÁTICAS

Una vez que hemos visto que tenemos la posibilidad de disponer de ecuaciones de compatibilidad de manera cómoda, la primera aplicación directa de ello es su utilización para obtener desplazamientos de nudos, de forma más sencilla y rápida que con los métodos anteriores, en las estructuras de nudos articulados isostáticas que ya habíamos podido calcular previamente a nivel de esfuerzos y reacciones.

Vamos a empezar viendo su aplicación al problema sencillo de una estructura triangular (ver figuras 3 y 4) para posteriormente aplicarlo a problemas más complejos. En este caso, recordemos que, con cierta dificultad, habíamos podido establecer unas relaciones geométricas con las que conocer los desplazamientos de los nudos. Se trata en este caso de volver a calcularlos haciendo uso del P.T.V. y comprobar la efectividad de uno y otro método.

En la tabla 1 podemos ver los resultados obtenidos previamente así como los datos de la estructura.

<i>Barra</i>	<i>L</i>	<i>A</i>	<i>N</i>	$\Delta L$	$n^a$	$n^b$	$n^c$
AB	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	<i>A</i>	$-\frac{P}{\sqrt{2}}$	$-\frac{Pa}{2AE}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
BC	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	<i>A</i>	$-\frac{P}{\sqrt{2}}$	$-\frac{Pa}{2AE}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
AC	<i>a</i>	<i>A</i>	$\frac{P}{2}$	$\frac{Pa}{2AE}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

**Tabla 1**

Puesto que lo que pretendemos es obtener una relación de compatibilidad por medio del P.T.V., deberemos establecer una relación entre el sistema real de alargamientos y un sistema virtual de fuerzas que nosotros ideemos. Del sistema real de desplazamientos, los alargamientos de la barras son ya conocidos (ver tabla 1) una vez que obtuvimos los axiles, sin embargo son una incógnita los movimientos de cualquiera de los nudos.

Dado que tenemos la posibilidad de inventar cualquier sistema virtual de fuerzas que se nos ocurra, con tal de que esté en equilibrio, deberemos de buscar aquel que haga que en nuestra ecuación aparezca el mínimo número de desplazamientos de nudos (que como hemos dicho son desconocidos). Ese número mínimo es recomendable que sea uno con objeto de que cada ecuación obtenida permita calcular directamente la única incógnita de desplazamientos.

Debido a que los desplazamientos son reales y normalmente distintos de cero, salvo en los apoyos, la única manera de hacer que desaparezcan de la ecuación del P.T.V. será multiplicándolos por una fuerza (virtual) de valor cero, con lo que no aportarán trabajo externo.

De esta manera, podemos deducir el procedimiento para crear sistemas virtuales de fuerzas que me permitan alcanzar los fines previstos. Tendremos que hacer un sistema de fuerzas en el que la única fuerza actuante esté aplicada en el nudo y en la dirección del desplazamiento que deseamos calcular. Con ello las únicas fuerzas externas adicionales que aparecen serán las reacciones en los apoyos y en estos sus desplazamientos son conocidos y de valor cero generalmente (la única excepción sería para el caso de los asientos que será tratado más adelante y puesto que es conocido no crea ningún tipo de problema).

Siguiendo estas indicaciones, el cálculo del desplazamiento horizontal del nudo C lo podemos obtener con un sistema que tenga una única fuerza actuando en el nudo en la dirección horizontal. En la figura 7.a podemos ver el sistema escogido para ello en el que se puede ver la práctica habitual y recomendada de hacer que esa fuerza sea de valor unitario, lo que en principio puede simplificar un poco los cálculos.

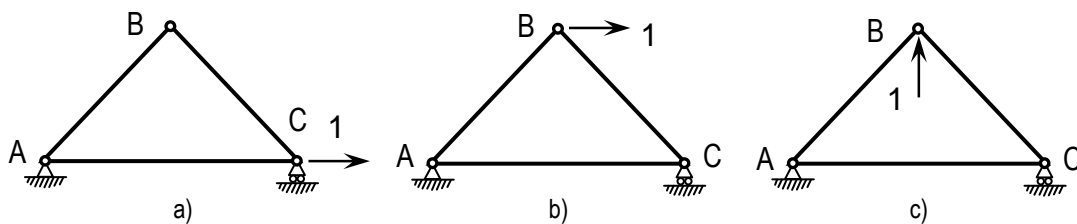


Figura 7. Sistemas virtuales de fuerzas

Una vez escogido el sistema virtual de fuerzas sólo nos queda calcular los esfuerzos que se producen en él y aplicar el P.T.V. sin olvidar que se debe ser cuidadoso con los sistemas de coordenadas elegidos. No está de más recalcar que no tiene importancia el sentido de la fuerza aplicada siempre y cuando se sea coherente con los productos de fuerzas y desplazamientos que nos proporcionan los términos de trabajo.

El cálculo del sistema de la figura 7.a es extremadamente sencillo y viene reflejado en la tabla 1 (axiles  $n^a$ ). Con ello aplicamos el P.T.V. y obtenemos el resultado esperado:

$$\sum_{\text{nudos}} [F_{ix} u_{ix}^* + F_{iy} u_{iy}^*] = \sum_{\text{barras}} n^a \cdot \Delta L^*$$

$$1 \cdot u_{Cx} = 1 \cdot \frac{Pa}{2AE}$$

$$u_{Cx} = \frac{Pa}{2AE}$$

Obviamente, este desplazamiento no encerraba ningún tipo de dificultad, vamos a continuación a calcular los desplazamientos horizontal y vertical del nudo B. En la figura 7.b y 7.c se pueden ver los sistemas virtuales de fuerzas utilizados en este caso siguiendo los criterios expuestos anteriormente. En la misma tabla 1 podemos ver el resultado de calcular dichos sistemas ( $n^b$  y  $n^c$ ).

Si aplicamos el P.T.V. al sistema b obtenemos el desplazamiento horizontal del nudo B:

$$\sum_{\text{nudos}} F^b \cdot u^* = \sum_{\text{barras}} n^b \cdot \Delta L^*$$

$$1 \cdot u_{Bx} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Pa}{2AE} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Pa}{2AE} + \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2AE}$$

$$u_{Bx} = \frac{Pa}{4AE}$$

Si hacemos lo mismo con el sistema c tenemos:

$$\sum_{\text{nudos}} F^c \cdot u^* = \sum_{\text{barras}} n^c \cdot \Delta L^*$$

$$1 \cdot u_{By} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Pa}{2AE} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{Pa}{2AE} - \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{2AE}$$

$$u_{By} = -\frac{Pa}{4AE} (2\sqrt{2} + 1)$$

Donde ya se puede destacar la ventaja de utilizar este procedimiento para el cálculo general de movimientos. Cuando el número de nudos y de barras es mayor, este método se hace imprescindible como veremos a partir de los ejemplos siguientes.

Se pretende conocer qué desplazamiento vertical se produce en el nudo C de la estructura de la figura 8 cuando se aplican verticalmente unas cargas de valor P en los nudos D y E. Se trata de una estructura simple de nudos articulados, isostática interna y externamente y por tanto, fácil de calcular. Además, dada la simetría que presenta tanto en geometría como en carga se puede realizar el cálculo de media estructura reduciéndose a la resolución del equilibrio de los nudos A y D (tal y como se muestra en la figura 8), previa obtención de las reacciones (de valor P hacia arriba). Obsérvese que las barras DC y CE no trabajan (por la simetría, ambas barras deberían tener el mismo axil, el cual, de no ser 0, daría una resultante vertical no equilibrada en el nudo C). En la tabla 2 se muestran los resultados (axiles N).

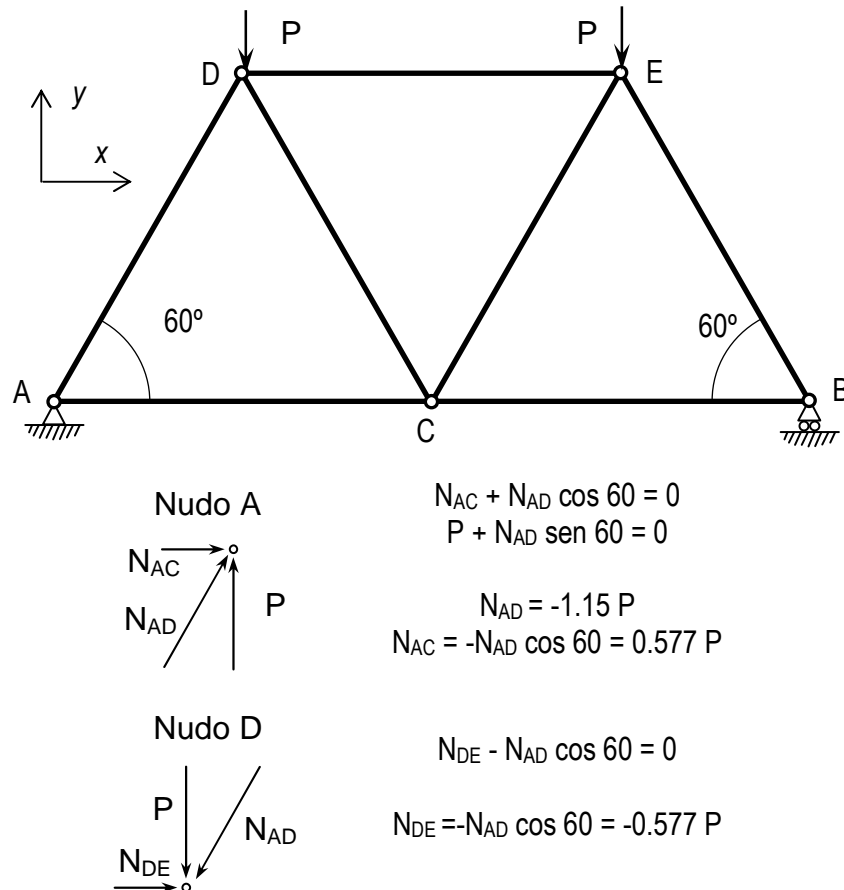


Figura 8. Estructura isostática

Para conocer el desplazamiento pedido por medio del P.T.V. debemos definir un sistema virtual de fuerzas adecuado y calcularlo. El sistema elegido es el que se muestra en la figura 9 donde se ha aplicado una única carga de valor unitario en el nudo C en sentido hacia abajo. De nuevo en la tabla 2 tenemos los esfuerzos de este sistema ( $n^a$ ) cuya obtención no reviste ninguna dificultad.

Restaría por último aplicar el P.T.V. entre el sistema real de desplazamientos y el virtual de fuerzas con lo que nos queda:

$$\sum_{nudos} F^a \cdot u^* = \sum_{barras} n^a \cdot \Delta L^*$$

$$-1 \cdot u_{Cy} = 2 \left( 0.577 \cdot \frac{1.15 P b}{AE} \right) + 2 \left( 0.288 \cdot \frac{0.577 P b}{AE} \right) + \left( 0.577 \cdot \frac{0.577 P b}{AE} \right)$$

$$u_{Cy} = -2 \frac{P b}{AE}$$

Por ser simétricos, tanto el sistema real como el virtual, se pueden agrupar los efectos en los términos que aparecen multiplicados por dos.



<i>Barra</i>	<i>L</i>	<i>A</i>	<i>N</i>	$\Delta L$	$r^a$
AD	<i>b</i>	<i>A</i>	$-1.15P$	$-1.15 \frac{Pb}{AE}$	$-0.577$
AC	<i>b</i>	<i>A</i>	$0.577P$	$0.577 \frac{Pb}{AE}$	$0.288$
DC	<i>b</i>	<i>A</i>	$0$	$0$	$0.577$
DE	<i>b</i>	<i>A</i>	$-0.577P$	$-0.577 \frac{Pb}{AE}$	$-0.577$
EC	<i>b</i>	<i>A</i>	$0$	$0$	$0.577$
BC	<i>b</i>	<i>A</i>	$0.577P$	$0.577 \frac{Pb}{AE}$	$0.288$
BE	<i>b</i>	<i>A</i>	$-1.15P$	$-1.15 \frac{Pb}{AE}$	$-0.577$

Tabla 2

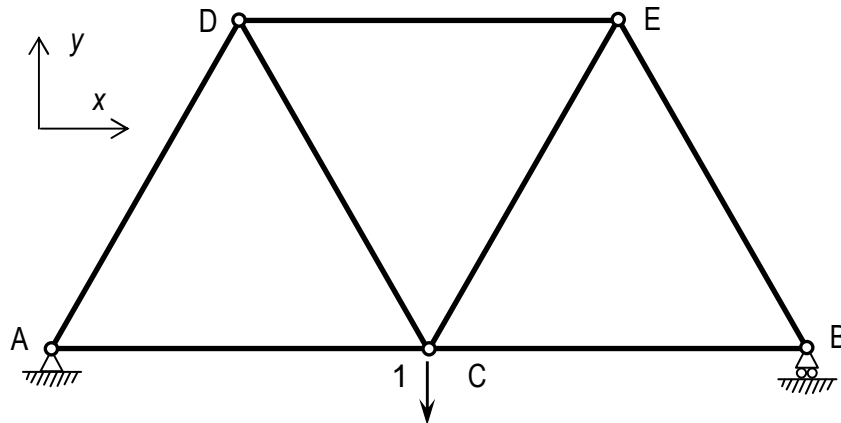


Figura 9. Sistema virtual de fuerzas

Es también interesante observar que por el hecho de haber escogido esta vez la carga unitaria en dirección hacia abajo, a la hora de evaluar los términos de trabajo externo se debe tener esto en cuenta y referenciarlo a un sistema de coordenadas coherente (sentido del eje *y* positivo hacia arriba, tal y como se muestra en la figura 8). Con ello aparece un signo negativo en el primer término que finalmente hace que el resultado de desplazamientos sea negativo, lo cual era lógico puesto que con el estado de cargas reales, el nudo C bajará y por tanto se desplazará en la dirección negativa del eje *y*. En adelante, mientras no se diga lo contrario, este será el sistema de referencia en el plano.

Se quiere con todo ello destacar, que el sistema virtual puede definirse con cualquiera de los sentidos de aplicación de la carga unitaria y que ello no influye en absoluto en los resultados.

Por último, podemos también aprovechar este ejemplo para analizar qué tratamiento le daríamos a un problema en el que se presentara un asiento diferencial en alguno de los apoyos. Supongamos que el apoyo B de la estructura ha sufrido un asentamiento de valor  $\delta$ . Sabemos que en una estructura isostática este tipo de carga no influye en los esfuerzos, afectando no obstante a los desplazamientos de los nudos. Por tanto, los resultados expresados en la tabla 2 son del todo válidos.

El movimiento del nudo C si se verá afectado y por tanto hay que volver a calcularlo siguiendo el mismo procedimiento anterior. El sistema virtual de fuerzas será de nuevo el mismo de antes, la única diferencia que nos encontraremos en el procedimiento vendrá dada por el hecho de que esta vez la carga unitaria no es la única que produce trabajo sino que en el apoyo que ha cedido existe un desplazamiento real y existe también una carga virtual aplicada, la reacción de valor  $1/2$ .

Por tanto, al aplicar el P.T.V. tendríamos:

$$-1 \cdot u_{Cy} + \frac{1}{2} \cdot u_{By} = 2 \left( 0.577 \cdot \frac{1.15Pb}{AE} \right) + 2 \left( 0.288 \cdot \frac{0.577Pb}{AE} \right) + \left( 0.577 \cdot \frac{0.577Pb}{AE} \right)$$

$$-u_{Cy} + \frac{1}{2}(-\delta) = 2 \frac{Pb}{AE}$$

$$u_{Cy} = - \left( 2 \frac{Pb}{AE} + \frac{\delta}{2} \right)$$

Vamos a ver, para terminar este apartado, un ejemplo en el que aparecen cargas de temperatura en las barras. Sea la estructura de la figura 10, se desea conocer los desplazamientos verticales de los nudos D y E. Para ello deberemos, siguiendo el mismo procedimiento anterior, calcular la estructura real y posteriormente definir y calcular dos sistemas virtuales de fuerzas que nos permitan obtener los desplazamientos pedidos por medio de la aplicación del P.T.V.

La estructura se encuentra cargada con unas acciones de valor P en los nudos D y E, y además las barras CD y DE están sometidas a un incremento de temperatura. La resolución de la estructura no supone ninguna complicación, en la figura 10 se pueden ver las operaciones realizadas. En este caso el cálculo de las reacciones no es tan directo como en los anteriores pero es sencillo. Conocidas éstas se obtienen de manera directa los axiles de las barras AB, AC y BD. Aplicando equilibrio a los nudos E y C se puede resolver completamente la estructura.

En la tabla 3 se presentan los resultados. Como es sabido, en una estructura isostática las cargas de temperatura en barra (al igual que en el caso anterior de los asientos) no afectan a nivel de esfuerzos

dada la capacidad de deformarse que tiene. Donde si afectará será en el cálculo de los alargamientos ya que las barras CD y DE, además de alargarse por efecto de las cargas, se dilatarán por efecto del gradiente de temperatura (que consideramos positivo), por lo que tendremos que calcular este incremento de longitud, que llamaremos  $\lambda$ , y sumar los dos.

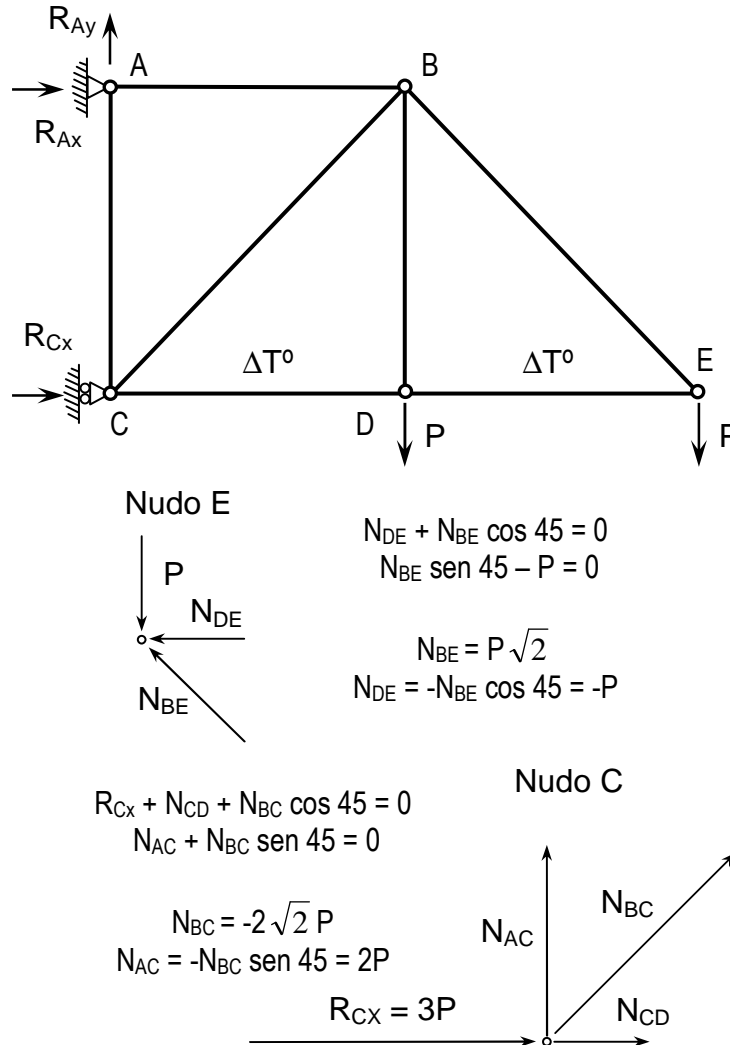


Figura 10. Estructura con cargas de temperatura

El alargamiento de una barra por efecto de la temperatura será:

$$\Delta L_{\Delta T^\circ} = \lambda = \alpha \cdot \Delta T^\circ \cdot L$$

Donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica del material de la barra. De nuevo, en la tabla 3 aparecen los alargamientos totales de las barras. Los sistemas virtuales y su cálculo no revisten tampoco dificultad. Utilizaremos, como es usual, los más sencillos, que son el correspondiente a la figura 11.a para la obtención del desplazamiento vertical del nudo E y el de la figura 11.b para el nudo D. En la tabla 3 se reflejan los resultados y con ella podemos aplicar la expresión del P.T.V. de manera sencilla.

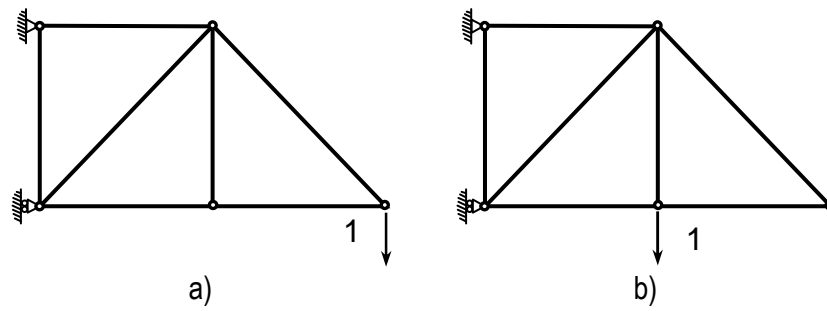


Figura 11. Sistemas virtuales de fuerzas

Barra	$L_i$	$A_i$	$N_i$	$\Delta L_i$	$n^a_i$	$n^b_i$
AB	$L$	$3A$	$3P$	$\frac{PL}{AE}$	$2$	$1$
AC	$L$	$2A$	$2P$	$\frac{PL}{AE}$	$1$	$1$
BC	$L\sqrt{2}$	$3A$	$-2\sqrt{2}P$	$-\frac{4PL}{3AE}$	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
BD	$L$	$A$	$P$	$\frac{PL}{AE}$	$0$	$1$
BE	$L\sqrt{2}$	$2A$	$\sqrt{2}P$	$\frac{PL}{AE}$	$\sqrt{2}$	$0$
CD	$L$	$A$	$-P$	$-\frac{PL}{AE} + \lambda$	$-1$	$0$
DE	$L$	$A$	$-P$	$-\frac{PL}{AE} + \lambda$	$-1$	$0$

Tabla 3

Para el cálculo de  $u_{Ey}$  tenemos:

$$-1 \cdot u_{Ey} = 2 \frac{PL}{AE} + 1 \frac{PL}{AE} + \sqrt{2} \frac{4PL}{3AE} + \sqrt{2} \frac{PL}{AE} - 1 \left( -\frac{PL}{AE} + \lambda \right) - 1 \left( -\frac{PL}{AE} + \lambda \right)$$

$$-1 \cdot u_{Ey} = 5 \frac{PL}{AE} + 7\sqrt{2} \frac{PL}{3AE} - 2\lambda$$

$$u_{Ey} = 2\lambda - \left( 5 + \frac{7\sqrt{2}}{3} \right) \frac{PL}{AE}$$

Y para obtener  $u_{Dy}$ :

$$-1 \cdot u_{Dy} = \frac{PL}{AE} + \frac{PL}{AE} + \sqrt{2} \frac{4PL}{3AE} + \frac{PL}{AE}$$

$$u_{Dy} = - \left( 3 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \frac{PL}{AE}$$

Podemos observar en este caso que el incremento de temperatura no afecta al descenso del punto D.

Antes de finalizar este apartado debemos hacer referencia a otro tipo de carga que pueden aparecer en las estructuras que son las debidas a defectos de montaje, ya sea alargamientos o acortamientos de barras. Como es fácil ver, el tratamiento de estos problemas sería idéntico al aquí tratado en relación con las cargas de temperatura con la diferencia de que no hay que calcular el alargamiento de la barra sino que lo tenemos de manera directa.

## 5. CÁLCULO DE ESTRUCTURAS HIPERESTÁTICAS

Como es sabido, existen dos maneras de abordar el cálculo de estructuras hiperestáticas, una es por medio de los denominados métodos de equilibrio y otra por medio de los métodos de compatibilidad. El cálculo de estructuras hiperestáticas de nudos articulados resulta más sencillo si se utilizan estos últimos métodos, en los que aplicamos primero las ecuaciones de equilibrio y terminamos de completar el sistema con ecuaciones de compatibilidad haciendo uso del P.T.V.

El procedimiento es, en estos casos, liberar los vínculos excedidos de manera que se convierta en isostática la estructura. Estos se sustituyen por acciones externas de valor desconocido siendo por tanto las incógnitas hiperestáticas. En función de estas incógnitas se puede resolver la estructura, con ella se obtendrán los esfuerzos y alargamientos de las barras. Finalmente, con la imposición de tantas ecuaciones de compatibilidad como incógnitas tengamos se despejan éstas y se cierra el problema.

Vemos, por tanto, que la resolución de estructuras hiperestáticas implica el uso de ecuaciones de compatibilidad que, como ya hemos visto, son relativamente sencillas de obtener por medio del P.T.V.

Por medio de unos ejemplos sencillos y con la resolución de un problema completo vamos a ver como se concretaría este procedimiento.

Sea la estructura de la figura 12 que como se puede observar es hiperestática externa de grado 1. No es posible resolverla a no ser que le liberemos alguna ligadura, por ejemplo dejamos libre el movimiento horizontal del nudo D.

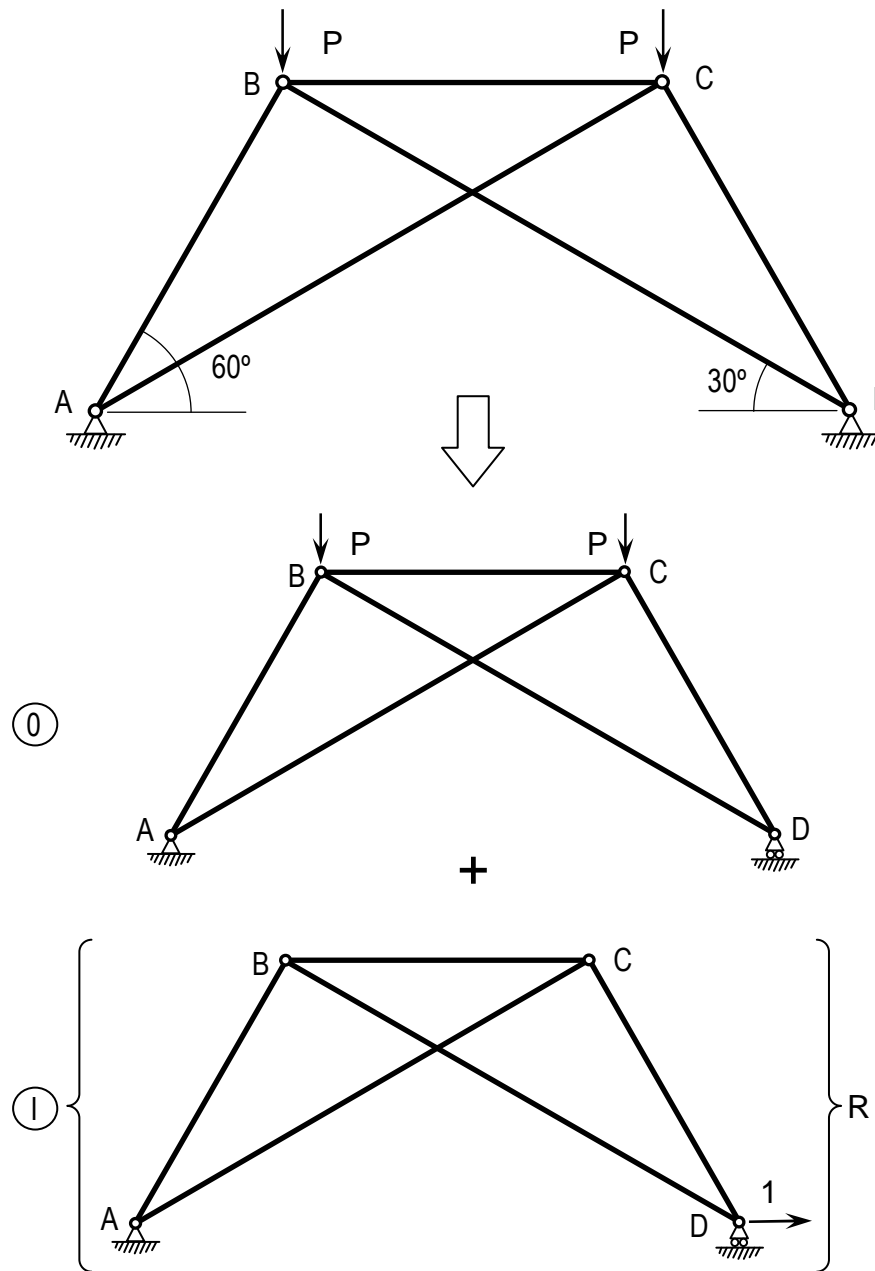


Figura 12. Estructura hiperestática externa

Para que la estructura obtenida responda al problema previamente establecido debemos hacer que realmente siga comportándose igual. Esto se traduce en dos condiciones, por un lado debe de existir una fuerza en la dirección del grado de libertad liberado (que denominaremos  $R$ ) que se corresponda con la reacción eliminada, y por otro lado, se tiene que cumplir que el desplazamiento real en esa dirección del nudo sea realmente cero.

La primera condición hace que se introduzca en la estructura la acción  $R$ , de valor desconocido por el momento y por tanto incógnita de nuestro problema. La segunda condición será la que nos permita calcular esta incógnita.

Por tanto, podemos descomponer el problema tal y como se refleja en la figura 12 donde vemos que tenemos dos subproblemas, uno el sistema 0, en el cual tenemos una estructura isostática sometida a las cargas del problema, y otro el sistema I en el que la única carga aplicada es la incógnita  $R$ . Por cuestiones que más adelante se verán, este problema se resolverá para una carga unitaria de manera que al multiplicarlo por  $R$  y sumarlo al anterior obtenemos el problema inicial.

En la tabla 4 vienen reflejados los resultados de calcular ambos subproblemas y sumarlos. Podemos destacar cómo los alargamientos están en función de la carga  $P$  y de la incógnita  $R$  y por tanto aún no está resuelto el problema, debemos ahora plantear una condición de compatibilidad para tener una ecuación más que nos lo resuelva.

<b>Barra</b>	$L_i$	$A_i$	$N_i^0$	$n_i^I$	$N_i = N_i^0 + Rn_i^I$	$\Delta L_i$
AB	$L$	$A$	$-1.73P$	$-1$	$-1.73P-R$	$\frac{(-1.73P - R)L}{AE}$
AC	$1.73L$	$A$	$P$	$1.73$	$P+1.73R$	$\frac{1.73(P + 1.73R)L}{AE}$
BC	$L$	$A$	$-1.73P$	$-2$	$-1.73P-2R$	$\frac{(-1.73P - 2R)L}{AE}$
BD	$1.73L$	$A$	$P$	$1.73$	$P+1.73R$	$\frac{1.73(P + 1.73R)L}{AE}$
CD	$L$	$A$	$-1.73P$	$-1$	$-1.73P-R$	$\frac{(-1.73P - R)L}{AE}$

**Tabla 4**

Esta ecuación es muy sencilla si recordamos lo que dijimos anteriormente de que el desplazamiento horizontal del nudo D debe ser cero. Por tanto, lo único que tenemos que hacer es obtener este desplazamiento (en función de  $R$ ) e igualarlo a cero, y para ello haremos uso del P.T.V.

De acuerdo con lo aprendido en el apartado anterior, el sistema virtual de fuerzas que nos permite calcular este desplazamiento es precisamente el sistema I, por tanto no tenemos que resolver más sistemas sino únicamente aplicar el P.T.V.:

$$1 \cdot u_{Dx} = 0 = 2 \left( -1 \frac{(-1.73P - R)L}{EA} \right) +$$

$$+ 2 \left( 1.73 \frac{1.73(P + 1.73R)L}{EA} \right) + \left( -2 \frac{(-1.73P - 2R)L}{EA} \right)$$

$$0 = 9.92P + 11.19R$$

$$R = -0.788P$$

Sustituyendo ahora  $R$  en los resultados de la tabla 4 obtenemos los esfuerzos reales de la estructura.

Veamos ahora el caso de una estructura hiperestática interna. El procedimiento a seguir es el mismo con pequeñas variaciones. Vamos a calcular ahora el problema de la figura 13, se trata de una estructura isostática externa pero hiperestática interna de grado 1.

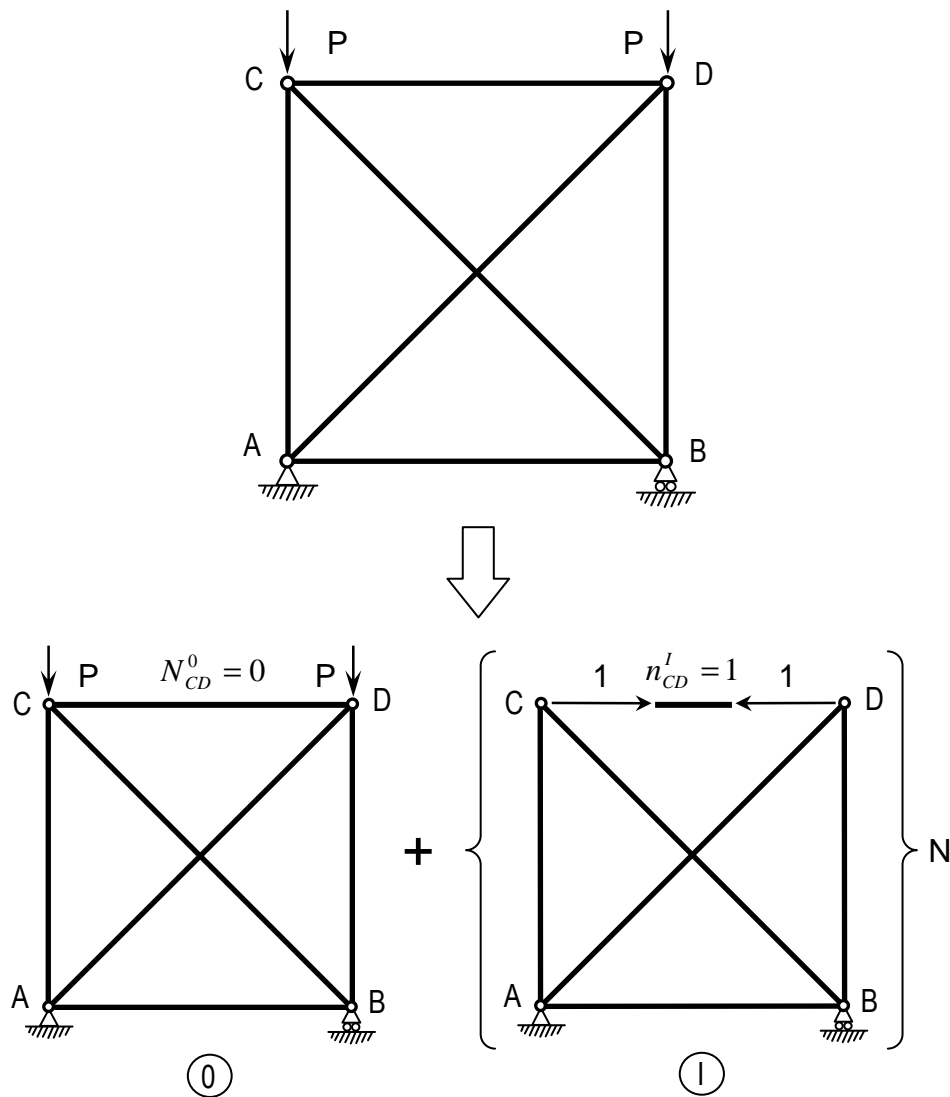


Figura 13. Estructura hiperestática interna



En este caso podemos calcular las reacciones, pero de ninguna manera podemos resolver los esfuerzos de las barras. Debemos, por tanto, procediendo de la misma forma que en el caso anterior, liberar un grado de libertad, esta vez interno.

Podemos descomponer el problema en uno en el que una barra, la CD, no trabaje y por tanto se convierta en isostático (sistema 0) al que le aplicamos las cargas externas, y otro (sistema I) en el que la única carga existente es el efecto de la barra anulada con un axil unitario. Si sumamos el sistema 0 y el sistema I multiplicado por  $N$  (que será a partir de ahora nuestra incógnita hiperestática) tendremos la misma estructura inicial.

La resolución de estos sistemas es extremadamente sencilla y en la tabla 5 se recogen los resultados.

<i>Barra</i>	$L_i$	$A_i$	$N_i^0$	$n_i^I$	$N_i = N_i^0 + Nn_i^I$	$\Delta L_i$
AC	$L$	$A$	$-P$	$1$	$-P+N$	$\frac{(-P+N)L}{AE}$
BD	$L$	$A$	$-P$	$1$	$-P+N$	$\frac{(-P+N)L}{AE}$
AD	$L\sqrt{2}$	$A$	$0$	$-\sqrt{2}$	$-N\sqrt{2}$	$-\frac{2NL}{AE}$
BC	$L\sqrt{2}$	$A$	$0$	$-\sqrt{2}$	$-N\sqrt{2}$	$-\frac{2NL}{AE}$
AB	$L$	$A$	$0$	$1$	$N$	$\frac{NL}{AE}$
CD	$L$	$A$	$0$	$1$	$N$	$\frac{NL}{AE}$

**Tabla 5**

Para la obtención de  $N$  podemos aplicar de nuevo el P.T.V., en este caso la condición que nos permite despejar esta incógnita no viene dada por un desplazamiento conocido sino por el hecho de utilizar un sistema de fuerzas en el que no hay cargas externas (sistema I), sino únicamente esfuerzos internos.

Si aplicamos el P.T.V. entre el sistema real y el sistema I como sistema virtual de fuerzas tenemos lo siguiente:

$$0 = \sum n^I \Delta L$$

$$0 = 2 \cdot 1 \frac{(-P + N)L}{AE} + 2(-\sqrt{2}) \frac{-2NL}{AE} + 2 \cdot 1 \frac{NL}{AE}$$

$$0 = -P + (2 + 2\sqrt{2})N$$

$$N = \frac{P}{(2 + 2\sqrt{2})}$$

Y con ello ya tenemos resuelta la estructura.

Por último, vamos a terminar esta exposición con una estructura hiperestática tanto interna como externa, figura 14. Además vamos a considerar la acción de un tensor cuyo alargamiento o acortamiento ( $\lambda$ ) debemos determinar con objeto de que una vez cargada la estructura el nudo C no sufra ningún descenso.

Al ser el problema hiperestático de grado 2, uno externo y otro interno, debemos liberar dos vínculos, uno interno y otro externo. Anulamos la barra BF, que sustituimos por su efecto correspondiente, axil  $N$ , y liberamos el movimiento vertical del nudo A, aplicándole una reacción vertical  $V$ . En la figura 15 se puede ver la descomposición correspondiente para la resolución cómoda del problema y que posteriormente nos permita la aplicación del P.T.V.

En la tabla 6 se muestra el resultado del cálculo de esfuerzos de cada uno de los sistemas así como los axiles totales (función de las dos incógnitas hiperestáticas) y los alargamientos. En estos últimos podemos ver como en la barra DE se ha introducido el alargamiento del tensor,  $\lambda$ , que en este caso es una incógnita adicional. Para poder despejarla deberemos hacer que se cumpla la condición que se nos haya impuesto y que es la razón de ser de ese elemento estructural.

En este problema se nos pide que lo ajustemos para que el nudo C no sufra ningún descenso, por tanto deberemos calcular este desplazamiento (en función de  $V$ ,  $N$  y  $\lambda$ ) y obligarle a que sea cero, de esta manera tendremos una ecuación adicional que junto a las dos condiciones de compatibilidad nos permitirán despejar las tres incógnitas.

Para el cálculo de  $u_C$ , como es lógico, haremos uso del P.T.V. Combinaremos el sistema real de desplazamientos con un sistema virtual con una carga unitaria en el nudo C en la dirección vertical.

Con objeto de no tener que calcular más sistemas es fácil ver que podemos hacer uso del sistema 0, ya que aunque todos los resultados estén multiplicados por la carga  $P$ , el resultado final será el mismo.

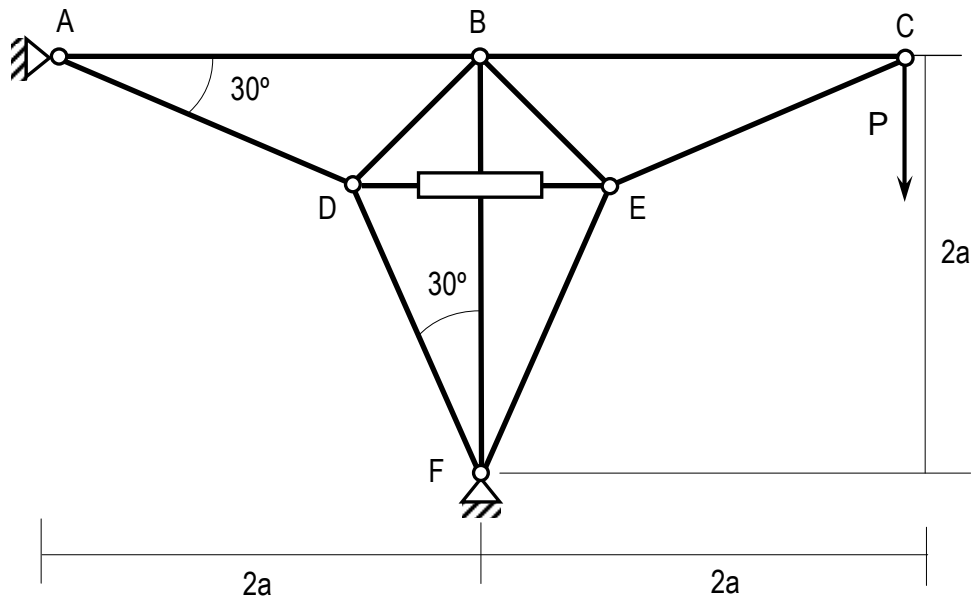


Figura 14. Estructura hiperestática con tensor

Por tanto, resumiendo, debemos aplicar el P.T.V. en tres ocasiones, dos para imponer las condiciones de compatibilidad fruto de la hiperestaticidad de la estructura y una más para hacer cumplir la condición del tensor.

De la condición de desplazamiento vertical del nudo A nulo tenemos:

$$1 \cdot u_{Ay} = \frac{a}{AE} \left[ -0.73(2P - 1.46V) + 2 \cdot 2.92 + 0.52(0.53P + 0.53V - 0.72N) + \right. \\ \left. + (-0.52)(-0.53P - 0.53V - 0.72N) + 1.58(0.61P + 2.3V - 0.84N) + \right. \\ \left. - 0.42(-2.3P - 0.61V - 0.84N) + 0.58(-0.84P + 0.84V + 1.15N) + 0.58 \frac{\lambda EA}{a} \right]$$

$$0 = 0.535P + 11.82V - 0.307N + 0.58 \frac{\lambda EA}{a}$$

Aplicando el P.T.V. con el sistema II sin cargas externas nos queda:

$$0 = \frac{a}{AE} \left[ -0.7(0.53P + 0.53V - 0.72N) - 0.7(-0.53P - 0.53V - 0.72N) - \right. \\ \left. - 0.58(0.61P + 2.3V - 0.84N) - 0.58(-2.3P - 0.61V - 0.84N) + \right. \\ \left. + 0.79(-0.84P + 0.84V + 1.15N) + 0.79 \frac{\lambda EA}{a} + 1 \cdot 2N \right]$$

$$0 = 0.316P - 0.316V + 4.825N + 0.79 \frac{\lambda EA}{a}$$

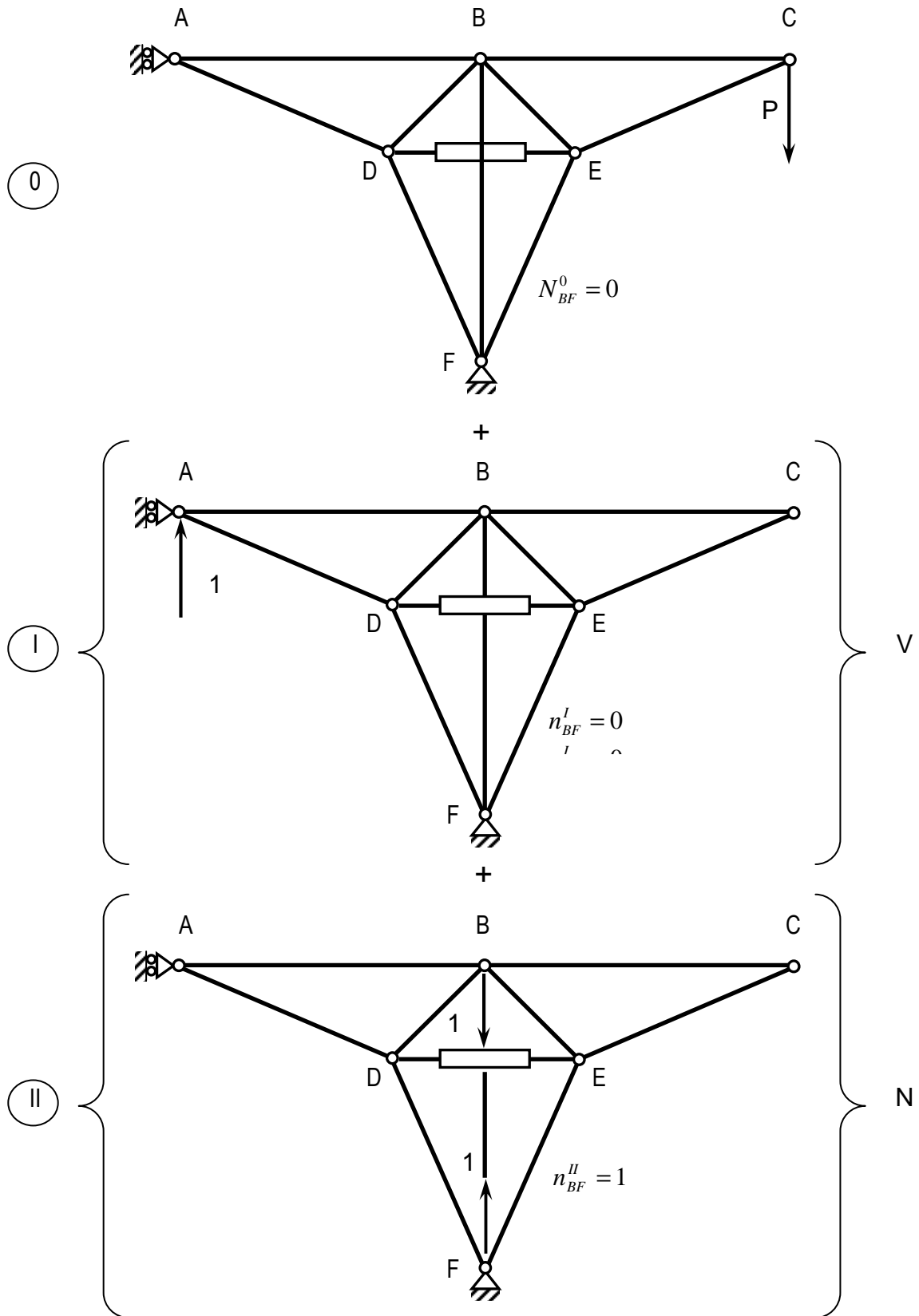


Figura 15. Descomposición del problema

<b>Barra</b>	$L_i$	$A_i$	$N_i^0$	$n_i^I$	$n_i^{II}$	$N_i = N_i^0 + Vn_i^I + Nn_i^{II}$	$\Delta L_i$
AB	$2a$	$A$	$P$	$-0.73$	$0$	$P - 0.73V$	$(2P - 1.46V) \frac{a}{AE}$
BC	$2a$	$A$	$1.73P$	$0$	$0$	$1.73P$	$3.46P \frac{a}{AE}$
AD	$1.46a$	$A$	$0$	$2$	$0$	$2V$	$2.92V \frac{a}{AE}$
DB	$1.03a$	$A$	$0.52P$	$0.52$	$-0.7$	$0.52(P+V) - 0.7N$	$(0.53(P+V) - 0.72N) \frac{a}{AE}$
BE	$1.03a$	$A$	$-0.52P$	$-0.52$	$-0.7$	$0.52(-P-V) - 0.7N$	$-(0.53(P+V) + 0.72N) \frac{a}{AE}$
EC	$1.46a$	$A$	$-2P$	$0$	$0$	$-2P$	$-2.92P \frac{a}{AE}$
DF	$1.46a$	$A$	$0.42P$	$1.58$	$-0.58$	$0.42P + 1.58V - 0.58N$	$(0.61P + 2.3V - 0.84N) \frac{a}{AE}$
EF	$1.46a$	$A$	$-1.58P$	$-0.42$	$-0.58$	$-1.58P - 0.42V - 0.58N$	$-(2.3P + 0.61V + 0.84N) \frac{a}{AE}$
DE	$1.46a$	$A$	$-0.58P$	$0.58$	$0.79$	$0.58(V-P) + 0.79N$	$(0.84(V-P) + 1.15N) \frac{a}{AE} + \square$
BF	$2a$	$A$	$0$	$0$	$1$	$N$	$2N \frac{a}{AE}$

Tabla 6

Por último, para que el nudo C no se mueva verticalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
 -P \cdot u_{Cy} = \frac{a}{AE} & \left[ P(2P - 1.46V) + 1.73P \cdot 3.46 + 0.52P(0.53P + 0.53V - 0.72N) + \right. \\
 & - 0.52P(-0.53P - 0.53V - 0.72N) - 2P(-2.92) + \\
 & + 0.42P(0.61P + 2.3V - 0.84N) - 1.58P(-2.3P - 0.61V - 0.84N) - \\
 & \left. - 0.58P(-0.84P + 0.84V + 1.15N) - 0.58P \frac{\lambda EA}{a} \right]
 \end{aligned}$$

$$0 = 18.75P + 0.533V + 0.307N - 0.58 \frac{\lambda EA}{a}$$

Con este sistema de ecuaciones despejamos las incógnitas, dándonos como resultado:

$$V = -1.56P$$

$$N = -4.83P$$

$$\lambda = -28.3 \frac{Pa}{EA}$$

Que si sustituimos en la tabla 6 nos proporciona los resultados finales del problema