Variable aleatoria

Conceptos básicos

Carlos Gamero Burón
José Luis Iranzo Acosta
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Málaga

Parcialmente financiado a través del PIE13-024 (UMA)

Parcialmente financiado a través
de PIE13-024 (UMA)

GRADO EN ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS

Estadística I
Bloque II

VARIABLE ALEATORIA Y MODELOS PROBABILÍSTICOS

Tema 4. PROBABILIDAD
Tema 5. VARIABLE ALEATORIA
Tema 6. MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES DISCRETAS
Tema 7. MODELOS PROBABILÍSTICOS PARA VARIABLES CONTINUAS

Tema 5: VARIABLE ALEATORIA

5.1. Introducción

5.2. Concepto de variable aleatoria. Características

5.3. Distribuciones bidimensionales, marginales y condicionadas

5.4. Independencia estocástica

5.1. INTRODUCCIÓN

- La variable aleatoria (v.a) es la herramienta matemática que permite pasar del estudio de sucesos aislados al estudio de las distribuciones de probabilidad.

- Es también la responsable de la aplicación del análisis matemático y de otras herramientas matemáticas a la Estadística.

- El concepto de v.a. constituye una **pieza básica** para el desarrollo de los métodos y técnicas inferenciales.

- **Trabajar con resultados numéricos permite hacer uso de desarrollos matemáticos**. De ahí el interés de buscar **reglas** que hagan posible pasar de un ***espacio muestral original***, E, de resultados posibles no numéricos, a un nuevo ***espacio muestral inducido***, **cuyos resultados o elementos van a ser números**.

- Este paso o transformación se realiza mediante la *función* llamada variable aleatoria, que representamos por X.

5.2. CONCEPTO DE VARIABLE ALEATORIA. CARACTERÍSTICAS

5.2.1. Concepto de variable aleatoria

***Ejemplo*:**

$\xi =$"lanzamiento de dos monedas al aire"

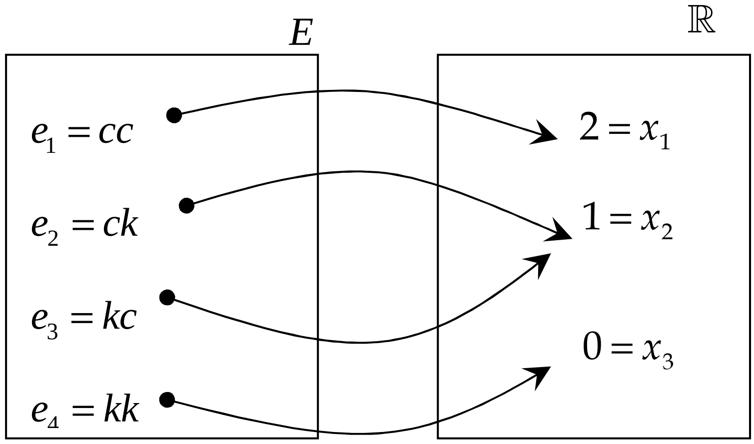
$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}=\{cc,ck,kc,kk\}$ → *Resultados cualitativos*

Tenemos definido un espacio probabilístico $(E,\mathcal{A},P)$

Definamos ahora X= "número de caras al lanzar dos monedas al aire".

$E'=\{0,1,2\}$ → *Resultados numéricos (números reales)*

Figura 4.1
Variable aleatoria como función real



Una variable aleatoria X es una función real, que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio.

- Es aleatoria porque toma sus valores en función del azar que caracteriza a ξ.

- Es una ***función real*** pero ***no de variable real*** ya que su dominio no es $\mathbb{R}$ sino *E*, que no está incluido en $\mathbb{R}$.

- $X(E)$ es el ***recorrido*** de la v.a.: conjunto de valores de $\mathbb{R}$ asignados a los elementos de *E*: $X(E) = \{x_1, x_2, x_3\} = \{0,1,2\} \subset \mathbb{R}$ ya que $X(kk) = 0$, $X(ck) = 1$, $X(kc) = 1$ y $X(cc) = 2$.

- Las anti-imágenes (recorrido de las flechas en sentido contrario en la Figura 4.1) pertenecen al álgebra original $\mathcal{A}$ (***propiedad de medibilidad***):

  $$X^{-1}(0) = \{kk\}, \quad X^{-1}(1) = \{ck\} \cup \{kc\} \text{ y } X^{-1}(2) = \{cc\}.$$

- La medibilidad de *X* permite calcular la probabilidad de que tome determinados valores.

  $$P_X(0) = P(\{kk\}) = \frac{1}{4} \qquad P_X(1) = P(\{ck\} \cup \{kc\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

  $$P_X(2) = P(\{cc\}) = \frac{1}{4} \qquad P_X(X \le 1) = P(\{kk\} \cup \{ck\} \cup \{kc\}) = \frac{3}{4}$$

Definición formal de variable aleatoria

Una variable aleatoria es una *función medible* de un espacio probabilístico $(E,\mathcal{A},P)$ en el espacio probabilizable $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, donde $\mathcal{B}$ es el $\sigma-$álgebra de Borel definida en $\mathbb{R}$. Una función se dice *medible* cuando se cumple que:

$$\forall B\in \mathcal{B}:\ X^{-1}(B)\in \mathcal{A}$$

donde $X^{-1}(B)=\{e\in E\,/\,X(e)\in B\}$.

Esta condición (*medibilidad*) quiere decir que la antiimagen de todo subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}$ que sea elemento del álgebra de Borel $\mathcal{B}$ es un subconjunto de *E*, que es a su vez elemento de $\mathcal{A}$

Por la condición de medibilidad de *X*, podemos considerar una ***probabilidad inducida*** en $\mathbb{R}$, que llamamos P_X. Si *B* es un boreliano de $\mathcal{B}$ tenemos la probabilidad inducida indicada por la siguiente igualdad:

$$P_X(B)=P\left(X^{-1}(B)\right)$$

Por tanto, la propiedad de medibilidad permite el paso:

$$(E,\mathcal{A},P)\ \Longrightarrow\ (\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$$

La ***probabilidad original*** es *P*, y está definida sobre el espacio probabilizable original $(E,\mathcal{A})$.

La ***probabilidad inducida*** P_X está definida sobre el espacio probabilizable $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ y se deduce de la probabilidad *P*.

Hemos conseguido un espacio probabilístico $(\mathbb{R},\mathcal{B},P_X)$, inducido por la definición de v.a., que resulta más agradable de tratar matemáticamente.

- A veces las variables aleatorias están ya implícitas en los elementos del espacio muestral original (resultado del experimento aleatorio es numérico).

  Ejemplos:

  - el experimento consiste en observar el tiempo de espera hasta la llegada de un autobús

  - observación de los ingresos anuales de un trabajador asalariado elegido al azar.

- En otros casos, en un mismo experimento aleatorio podemos definir diferentes variables aleatorias.

  Ejemplo: al lanzar dos monedas al aire podemos asignar a cada suceso la variable "número de caras", pero también el "número de cruces".

Nunca debe confundirse el experimento con la variable aleatoria, ni el espacio muestral con el conjunto de valores que toma la variable.

- ***Tipos de variables aleatorias:***

Según la naturaleza del recorrido $X(E)$:

a) *Discretas*: X sólo toma un número finito de valores reales o infinito, pero numerable

Ejemplos:

- número de piezas defectuosas que aparecen en un proceso de fabricación
- número de llamadas telefónicas que se reciben en una centralita durante un determinado período de tiempo
- número de depósitos efectuados al día en una entidad bancaria, etc.

b) *Continuas*: X puede tomar un número infinito no numerable. Una variable aleatoria es continua cuando puede tomar todos los posibles valores del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales $(-\infty < x < \infty)$ o de un subconjunto de él, definido por un intervalo $(l_0 \leq x \leq l_k)$.

Ejemplos:

- tiempo en minutos que dedica un alumno a hacer un examen con duración máxima de dos horas $(0 \leq x \leq 120)$,
- cantidad de agua caída al día en un determinado punto geográfico $(x \geq 0)$.

Demos un paso más…

- *Al definir una variable aleatoria lo que perseguimos en última instancia es hacer que el cálculo de probabilidades sea matemáticamente más "agradable" al trabajar con números.*

- Aún no lo hemos conseguido del todo. Estamos habituados a manejar funciones reales de variable real, del tipo $y=f(x)$, pero nuestra probabilidad inducida P_X sigue siendo una ***función de conjunto***, como lo era P.

- ***El siguiente paso debe ser definir funciones reales de variable real que proporcionen probabilidades para nuestra v.a..***

- Estas funciones reciben el nombre de ***función de cuantía, función de densidad y función de distribución***.

5.2.2. Distribución de probabilidad de variables aleatorias discretas

Si X es una ***v.a. discreta*** con recorrido $X(E)=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, su ***distribución de probabilidad (función de cuantía)*** puede escribirse como:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, k$$

Las dos ***propiedades*** que debe cumplir una función real de variable real para ser función de cuantía son:

(1) $f(x_i) \geq 0$ para $i = 1, 2, \ldots, k$

(2) $\sum_{i=1}^{i=k} f(x_i) = 1.$

- Se denomina ***función de cuantía*** porque proporciona la ***cantidad de probabilidad*** que corresponde a cada valor de la v.a. discreta *X*.

- La primera condición establece simplemente que las probabilidades no pueden ser negativas. La segunda condición nos dice que la suma de toda la masa de probabilidad debe ser igual a la unidad.

- $f(x_i)$ es ya una ***función real de variable real***, las que estamos acostumbrados a manejar (el dominio es $\mathbb{R}$ y el conjunto imagen es $[0,1] \in \mathbb{R}$).

- Una función de cuantía puede expresarse de tres maneras distintas:

  1) **tabla** en la que se recojan los pares (x_i, p_i).
  2) expresión matemática del tipo ***f*(*x*)**.
  3) gráfica: ***diagrama de barras***

***Ejemplo 1*:**

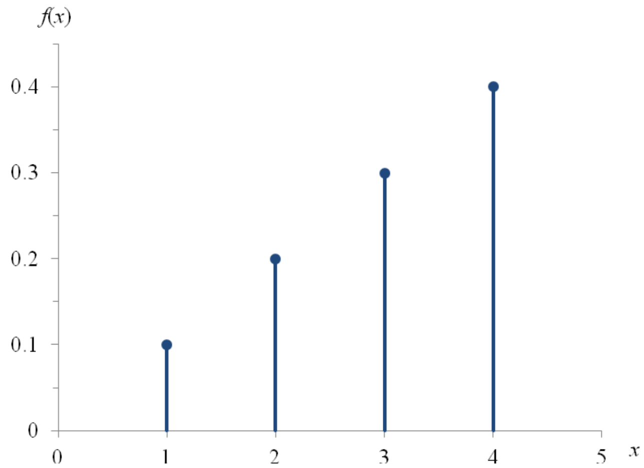
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Es una función de cuantía porque cumple las dos propiedades que le son exigibles.

Tabla 4.1
Ejemplo 1 de función de cuantía (tabla)

x_i	$f(x_i)$
1	0,1
2	0,2
3	0,3
4	0,4
	1,0

Figura 4.2
Ejemplo 1 de función de cuantía (Representación gráfica)
Diagrama de barras



***Ejemplo 2*:**

X="número de caras en el lanzamiento de dos monedas" es una v.a. discreta.

Tabla 4.2
Ejemplo 2 de función de cuantía (tabla)

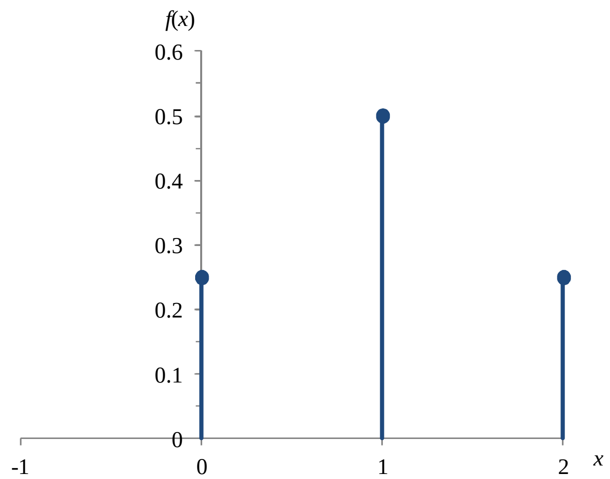
x	$f(x)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
	1

Puede comprobarse que su forma funcional es:

$$f(x) = \frac{2!}{x!(2-x)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \text{ para } x = 0,1,2$$

Esta es la función de cuantía binomial (la veremos en el Tema 6)

Figura 4.3
Ejemplo 2 de función de cuantía
(Representación gráfica)



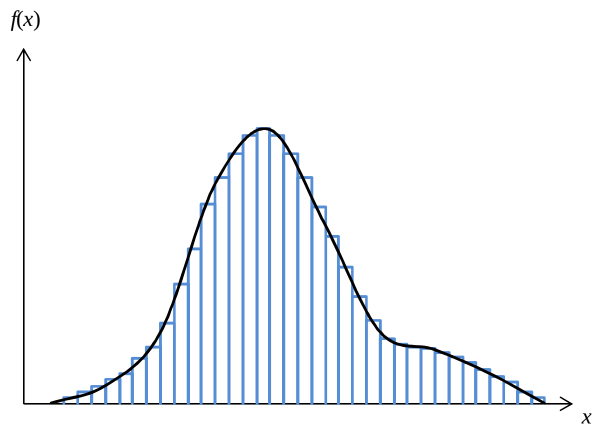
5.2.3. Distribución de probabilidad de variables aleatorias continuas

- En el caso de v.a. continua, la *distribución de probabilidad* no puede darse para valores puntuales ya que ésta toma un número ***infinito no numerable de valores*** para un subconjunto de la recta real.

- ***Los valores hay que agruparlos en intervalos exhaustivos y mutuamente excluyentes***. A cada intervalo se le asignará una probabilidad y su representación gráfica será un ***histograma***. El *área* de cada rectángulo que tiene por base un intervalo concreto será la probabilidad de que la variable tome valores en ese intervalo.

- Al aumentar el número de intervalos (amplitudes cada vez más pequeñas), ***en el límite*** el perfil de ese histograma será el de una **línea continua** bajo la cual se encierra toda la masa de probabilidad.

Figura 4.4
Función de densidad como límite del histograma



- A esa línea continua que nos da las ordenadas del histograma límite se le llama ***función de densidad*** de una v.a. continua.

- La función de densidad no proporciona directamente probabilidades, sino ***densidades de probabilidad***, si bien el área bajo esa función es igual a la unidad.

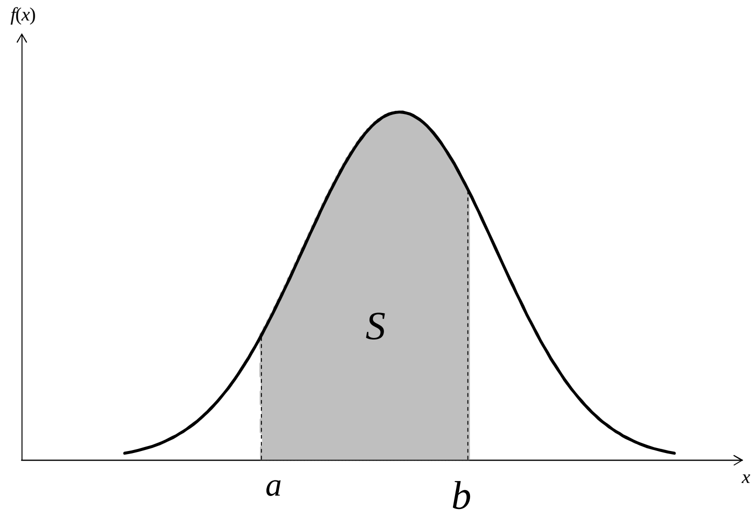
- **Propiedades** de la función de densidad de v.a. continua:

  1) $f(x) \geq 0 \qquad -\infty < x < +\infty$ (densidades de probabilidad positivas)

  2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, implica que el área bajo la curva y por encima del eje de abscisas es igual a la unidad.

- Obtención a partir de la $f(x)$ de la probabilidad de que X tome valores dentro de un determinado intervalo $[a,b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = S$$



- ***Importante:* la probabilidad de que una v.a. continua tome un valor concreto es siempre cero:**

$$P(X = x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x)dx = 0.$$

Por tanto, para este tipo de variables, se cumplen las siguientes igualdades:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

- ***Importante:* La función de densidad de una v.a. continua no da directamente probabilidades sino densidades de probabilidad.**

***Ejemplo*:**

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x)=\begin{cases} 0'1x & 0<x<\sqrt{20} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide:

a) Compruebe que es una función de densidad.

b) Obtenga la probabilidad de que X tome valores entre 1 y 3.

Resolución:

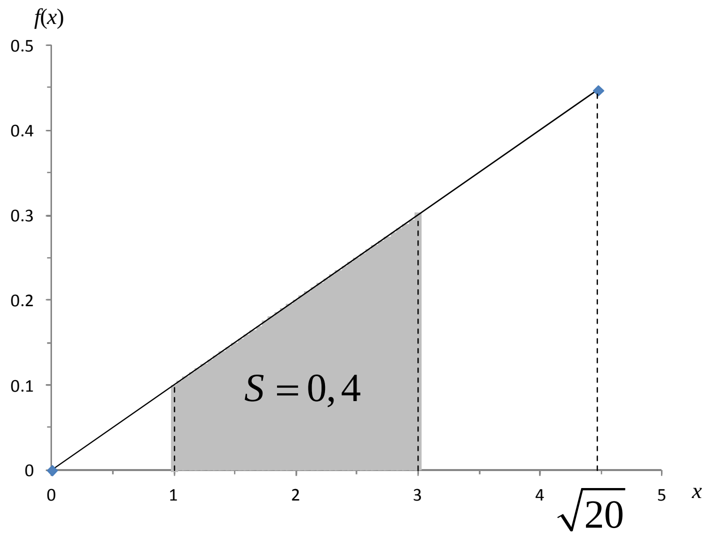
a) Tenemos que comprobar que cumple las dos condiciones:

1) $f(x)=0{,}1x \geq 0$ con $0<x<\sqrt{20}$.

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{20}} f(x)dx = \int_{0}^{\sqrt{20}} 0{,}1x dx = \left[0{,}1\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{20}} = 0{,}1\frac{20}{2} - 0 = 1.$

$f(x)$ cumple las condiciones, luego es una función de densidad.

b) $P(1<X<3)=\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 0{,}1xdx = \left[0{,}1\frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 0{,}1\frac{9}{2} - 0{,}1\frac{1}{2} = 0{,}4.$



5.2.4. Función de distribución

Para una v.a. X (***discreta o continua***) la *función de distribución*, $F(x)$, es la función que da la probabilidad acumulada hasta el punto x, es decir,

$$F(x) = P(X \leq x)$$

- Su significado es análogo a la distribución de frecuencias relativas acumuladas vista en Estadística Descriptiva.

- **Propiedades**:

  1. $F(-\infty) = 0$

  2. $F(+\infty) = 1$

  3. Es una función monótona no decreciente

  4. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

  5. $F(x)$ es continua por la derecha. En cambio, por la izquierda no siempre lo es y cuando no lo es, tiene un número finito pero numerable de puntos de discontinuidad (similar a lo que ocurría con el diagrama escalonado y la ojiva en Estadística Descriptiva).

a) Función de distribución para variables aleatorias discretas

Siendo X una v.a. discreta, se tiene que:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- $F(x)$ es escalonada, constante a intervalos. Cada salto (discontinuidad) se produce en los valores aislados, siendo en cada uno de ellos continua por la derecha y discontinua por la izquierda.

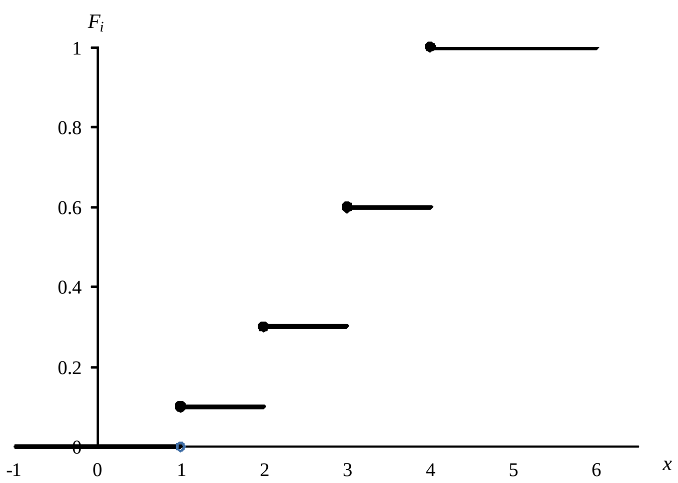
- Utilización de esta función para el **cálculo de probabilidades**:
  - $P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$
  - $P(X > x_i) = 1 - P(X \le x_i) = 1 - F(x_i)$
  - $P(X < x_i) = P(X \le x_{i-1}) = F(x_{i-1})$
  - $P(X \ge x_i) = 1 - P(X < x_i) = 1 - F(x_{i-1})$
  - $P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$
  - $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) + P(X = a)$
  - $P(a \le X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a) + P(X = a)$
  - $P(a < X < b) = F(b) - P(X = b) - F(a)$

***Ejemplo*:**

La tabla adjunta recoge la función de distribución de la v.a. X cuya función de cuantía es:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x & x = 1,2,3,4 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

x_i	$F(x_i)$
$[-\infty, 1)$	0
$[1, 2)$	0,1
$[2, 3)$	0,3
$[3, 4)$	0,6
$[4, +\infty)$	1,0



A partir de esa información podemos calcular, por ejemplo, las siguientes probabilidades:

1) $P(X=3)=F(3)-F(2)=0,6-0,3=0,3$

2) $P(X=2,5)=0,$ ya que 2,5 no es un valor que tenga asignada una probabilidad distinta de cero en la función de distribución.

3) $P(X\le 2,5)=F(2,5)=0,3.$ Obsérvese que, aunque 2,5 no es un valor que pueda tomar la v.a., le corresponde un valor distinto de cero en la función de distribución.

4) $P(X<3)=P(X\le 2)=F(2)=0,3$

5) $P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-F(2)=1-0,3=0,7$

6) $P(X\ge 2)=1-P(X\le 1)=1-F(1)=1-0,1=0,9$

7) $P(2<X\le 4)=F(4)-F(2)=1-0,3=0,7$

8) $P(2<X<4)=P(X=3)=F(3)-F(2)=0,6-0,3=0,3.$

b)Función de distribución para variables aleatorias continuas

En el caso de v.a. continua, se define la función de distribución como:

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- En el integrando se utiliza t en lugar de x para que no haya confusión con el límite superior de integración.

- Teniendo en cuenta que en las variables aleatorias continuas $P(X = x_i) = 0,$ se tiene que:

- $P(X < x_i) = P(X \leq x_i) = F(x_i)$

- $P(x_1 < X \leq x_2) = P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(x_1 \leq X < x_2) = P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$

- Cuando lo que se quiere es **calcular la probabilidad de que una variable tome valores dentro de un intervalo**, entonces haremos uso de integrales definidas ya que:

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

- Sólo para v.a. continua se cumple que:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad \text{o, lo que es lo mismo,} \quad f(x) = F'(x).$$

***Ejemplo*:**

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}1x & 0 < x < \sqrt{20} \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

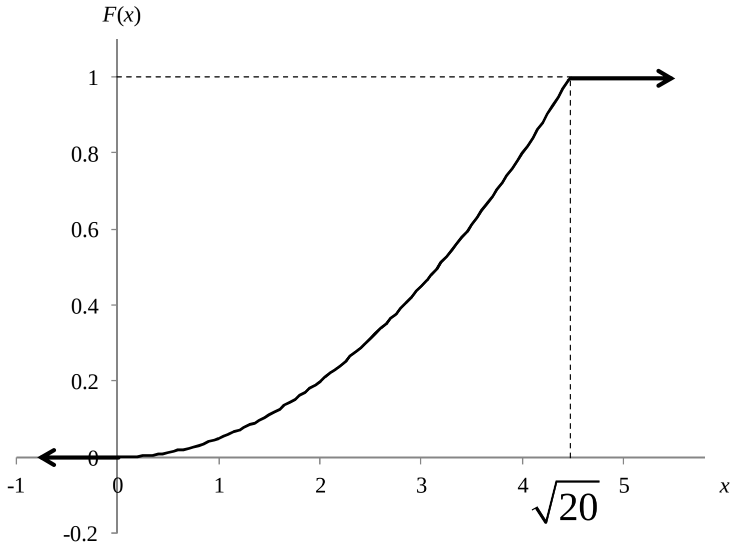
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} 0{,}1tdt = \left[0{,}1\frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^{t=x} = 0{,}1\frac{x^2}{2} - 0 = 0{,}05x^2.$$

Se comprueba que: $\dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x) = 0{,}1x = f(x).$

La manera de expresar correctamente la función de distribución es:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leq 0 \\ 0{,}05x^2 & \text{para } 0 < x \leq \sqrt{20} \\ 1 & \text{para } x > \sqrt{20} \end{cases}$$

siendo su representación gráfica la siguiente:



$$P(1 < X < 3) = F(3) - F(1) = 0,05 \cdot 9 - 0,05 \cdot 1 = 0,45 - 0,05 = 0,4.$$

5.2.5. Características de una variable aleatoria

De igual modo que cuando se estudió una variable en Estadística Descriptiva se analizaron sus distintas características relativas a su forma, medidas de posición, dispersión, etc., también en el caso de variables aleatorias puede realizarse el mismo tipo de análisis.

a) Esperanza Matemática

- El concepto de *valor esperado* o *esperanza matemática* de una variable es uno de los más importantes en el estudio de las propiedades de las distribuciones de probabilidad.

  Ejemplo:

  Una aplicación común de la esperanza matemática se encuentra en las apuestas o los juegos de azar.

  La ruleta americana tiene 38 casillas equiprobables. El acierto de una apuesta a un único número paga 35 a 1 (es decir, cobramos 35 veces lo que hemos apostado y recuperamos la apuesta, así que recibimos 36 veces lo que hemos apostado). Por tanto, considerando los 38 posibles resultados, el *beneficio esperado* o esperanza matemática de apostar un euro a un solo número es:

$$E[X] = 35 \cdot \frac{1}{38} + (-1) \cdot \frac{37}{38} \simeq -0,0526 \text{ euros}$$

- El valor que toma la esperanza matemática puede no ser "esperado": podría ser un valor improbable o incluso imposible).

  Ejemplo: el valor esperado cuando tiramos un dado de 6 caras es 3,5.

$$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$$

  y cabe destacar que 3,5 no es un valor posible al rodar el dado.

- La esperanza matemática se corresponde con la *media ponderada* de los valores de la variable, donde las ponderaciones son las respectivas probabilidades de cada valor.

- Representa la ***cantidad media que se "espera"*** como resultado de un experimento aleatorio cuando la probabilidad de cada suceso se mantiene constante y el experimento se repite un elevado número de veces.

- Para ***v.a. discreta***, la esperanza se define como:

$$E(X) = \sum_{x} x\, f(x) = \mu$$

- Para ***v.a. continua***, la esperanza nos indica el *centro de gravedad de la distribución*:

$$E(X) = \int_{x} x\, f(x)\, dx = \mu$$

- **Esperanza de una función $\varphi(X)$**

$$E[\varphi(X)] = \sum_{x} \varphi(x)\, f(x) \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. discreta}$$

$$E[\varphi(X)] = \int_{x} \varphi(x)\, f(x)\, dx \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. continua}$$

- Téngase siempre presente que ***cualquier función de una v.a. es otra v.a.*** que "hereda" las propiedades probabilísticas de la variable original.

***Ejemplo*:**

Supongamos el juego según el cual un jugador recibe 100 euros por cada punto que obtenga en el lanzamiento de su dado. ¿Cuál es el valor esperado de este juego? Veamos qué valores toma la v.a. original, su función y las probabilidades asociadas:

x_i	$\varphi(x_i) = 100x_i$	$f(x_i)$
1	100	1/6
2	200	1/6
3	300	1/6
4	400	1/6
5	500	1/6
6	600	1/6

Calculemos ahora el valor esperado del juego:

$$E[\varphi(X)] = \sum_x \varphi(x)\, f(x) = \varphi(x_1)\, f(x_1) + \varphi(x_2)\, f(x_2) + \cdots + \varphi(x_6)\, f(x_6) =$$

$$= 100 \cdot \frac{1}{6} + 200 \cdot \frac{1}{6} + 300 \cdot \frac{1}{6} + 400 \cdot \frac{1}{6} + 500 \cdot \frac{1}{6} + 600 \cdot \frac{1}{6} = 350 \text{ euros.}$$

Propiedades de la esperanza matemática:

El símbolo E es un operador matemático, es decir, un símbolo que representa una operación matemática que hay que realizar (al igual que el operador $\sum$ o el operador $\prod$).

1. Si $\varphi(X) = a$, siendo a una constante, $\boxed{E[a] = a.}$

- V.a. discreta: $E[a] = \sum_x af(x) = a\sum_x f(x) = a \cdot 1 = a$

- V.a. continua: $E[a] = \int_x af(x)dx = a\int_x f(x)dx = a \cdot 1 = a$

2. (*Cambio de origen*): Si $\varphi(X) = a + X$, $\boxed{E[a + X] = a + E[X]}$

3. (*Cambio de escala*): Si $\varphi(X) = bX$, $\boxed{E[bX] = bE[X]}$

4. (*Transformación lineal*): Si $\varphi(X)=a+bX$, $\boxed{E(a+bX)=a+bE(X)}$

- V.a. continua:

$$E\left[a+bX\right]=\int_x (a+bx)\, f(x)dx = a\underbrace{\int_x f(x)dx}_{=1}+b\int_x xf(x)dx = a+bE\left[X\right]$$

$\boxed{\text{5. Si } a \le X \le b, \text{ entonces } a \le E(X) \le b.}$

6. Si $\varphi(X)=g(X)+h(X)$, $\boxed{E[g(X)+h(X)]=E[g(X)]+E[h(X)]}$

$$E[g(X)+h(X)]=\int_x [g(x)+h(x)]\, f(x)dx =$$

$$=\int_x g(x)f(x)dx+\int_x h(x)f(x)dx = E\left[g(X)\right]+E\left[h(X)\right]$$

7. Si $\varphi(X)=(a+bX)^n$, siendo a y b constantes y n cualquier número entero, entonces:

$$\boxed{E\left[(a+bX)^n\right]=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} a^{n-i}b^iE(X^i)}$$

b)Momentos de una variable aleatoria

- Los momentos son números que caracterizan a una distribución de probabilidad, de tal forma que dos variables tienen la misma distribución si tienen todos lo momentos iguales y serán tanto más parecidas cuanto más momentos tengan iguales.

- El ***momento de orden r con respecto al origen*** se define como:

$$\boxed{\mu_r' = E\left[X^r\right] \qquad \text{para } r = 0,1,2,3,\ldots.} \quad \Rightarrow \quad \varphi(X) = X^r$$

$$\mu_r' = E\left[X^r\right] = \sum_x x^r f(x) \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. discreta}$$

$$\mu_r' = E\left[X^r\right] = \int_x x^r f(x)dx \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. continua}$$

Para cualquier v.a. se tiene que:

Si $r = 0$ $\qquad \mu_0' = E\left[X^0\right] = E[1] = 1$

Si $r = 1$ $\qquad \mu_1' = E\left[X^1\right] = E\left[X\right] = \mu$ (media poblacional)

- El ***momento de orden r con respecto a la media o momento central de orden r*** se define como:

$$\boxed{\mu_r = E\left[\left(X-\mu\right)^r\right] \qquad \text{para } r = 0,1,2,3,\ldots.} \quad \Rightarrow \quad \varphi(X) = \left(X-\mu\right)^r$$

$$\mu_r = E\left[\left(X - \mu\right)^r\right] = \sum_x (x - \mu)^r f(x) \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. discreta}$$

$$\mu_r = E\left[\left(X - \mu\right)^r\right] = \int_x (x-\mu)^r f(x)dx \qquad \text{si } X \text{ es una v.a. continua}$$

Para cualquier v.a. se tiene que:

Si $r=0$ $\quad \mu_0 = E\left[(X - \mu)^0\right] = E[1] = 1$

Si $r=1$ $\quad \mu_1 = E\left[(X - \mu)^1\right] = E[X] - E[\mu] = \mu - \mu = 0.$

Un momento con respecto a la media importante es el momento de orden 2, ya que se corresponde con la ***varianza*** de la v.a.. Así:

Si $r=2$ $\quad \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = Var(X) = \sigma^2$

La varianza es la esperanza del cuadrado de las desviaciones respecto al centro de gravedad de la distribución. Da idea de la ***dispersión*** de la v.a. respecto de μ.

Los momentos centrales tercero y cuarto proporcionan información muy útil respecto a la forma de la distribución de la v.a. X

- Los momentos respecto a la media pueden expresarse en función de los momentos con respecto al origen.

Ejemplo: $\boxed{\sigma^2 = E\left[X^2\right] - \mu^2 = \mu_2' - \mu_1'^2.}$

- A todos los momentos de una distribución se les conoce como los ***parámetros*** de la distribución, siendo la media y la varianza los más importantes. Como ya se ha indicado anteriormente, son números que caracterizan a la distribución de probabilidad.

c) Varianza, desviación típica y coeficiente de variación

- La varianza es el momento con respecto a la media de orden 2:

$$Var(X) = \sigma^2 = \mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \mu_2' - \mu^2$$

- Propiedades de la varianza:

1. $\boxed{Var(a) = 0}$

2. (*Cambio de origen*): $\boxed{Var(a+X) = Var(X)}$

3. (*Cambio de escala*): $\boxed{Var(bX) = b^2 Var(X)}$

   Se deduce que $Var(-X) = Var(X)$

4. (*Transformación lineal*): $\boxed{Var(a+bX) = b^2 Var(X)}$

5. La varianza es la mínima desviación cuadrática media:

$$E\left[(X-\mu)^2\right] < E\left[(X-p)^2\right] \quad \text{para todo } p \neq \mu.$$

- $Desv(X) = \sigma = +\sqrt{Var(X)}$

- $CV = \dfrac{\sigma}{\mu} \cdot 100$

d) Variable tipificada

Sea X una v.a. cualquiera con esperanza igual a μ_X y varianza igual a σ_X^2. Diremos que Z es la variable tipificada de X si es igual a:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

- Es **adimensional**
- **Propiedades:**

1. $\boxed{E[Z]=0}$

$$E[Z]=E\left[\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right]=\frac{1}{\sigma_X}E[X-\mu_X]=\frac{1}{\sigma_X}\left[E[X]-E[\mu_X]\right]=\frac{1}{\sigma_X}[\mu_X-\mu_X]=0$$

2. $\boxed{Var(Z)=1}$

$$Var(Z)=Var\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)=\frac{1}{\sigma_X^2}Var(X-\mu_X)=\frac{1}{\sigma_X^2}Var(X)=\frac{1}{\sigma_X^2}\sigma_X^2=1$$

e) Función generatriz de momentos

Se denomina *función generatriz de momentos de la v.a. X* y la representamos por $M_x(t)$ a la siguiente esperanza:

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] \quad \Rightarrow \quad \varphi(X) = e^{tX}$$

donde t es una variable real auxiliar (la función generatriz de momentos es una función real de variable real).

- Si X es una v.a. discreta: $$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_x e^{tx} f(x)$$

- Si X es una v.a. continua: $$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \int_x e^{tx} f(x)dx$$

- ***Principal utilidad:***

A partir de ella se puede obtener cualquier μ'_r

$$\mu'_r = M_X^{(r)}(t)\Big|_{t=0} = \left[\frac{d^r M_X(t)}{dt^r}\right]_{t=0} \qquad r = 0,1,2,.....$$

Ejemplos:

$$\mu'_1 = \mu = M_X^{(1)}(0) = \left[\frac{dM_X(t)}{dt}\right]_{t=0}$$

$$\mu'_2 = M_X^{(2)}(0) = \left[\frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\right]_{t=0}$$

$$\mu'_3 = M_X^{(3)}(0) = \left[\frac{d^3 M_X(t)}{dt^3}\right]_{t=0}$$

- **Propiedades** de $M_X(t) = E\left[e^{tX}\right]$:

1. $\boxed{M_X(0) = 1}$

2. (*Cambio de origen*): $\boxed{\text{Si } Y = a + X,\ M_Y(t) = e^{ta} M_X(t)}$

   De esta propiedad se deduce que $M_{X-\mu}(t) = e^{-\mu t} M_X(t)$.

3. (*Cambio de escala*): $\boxed{\text{Si } Y = bX,\ M_Y(t) = M_X(tb)}$

4. (*Transformación lineal*) : $\boxed{\text{Si } Y = a + bX,\ M_Y(t) = e^{ta} M_X(tb)}$

5. Si Z es la variable tipificada de X, con $E(X) = \mu_X$ y $Var(X) = \sigma_X^2$, se tiene que:

$$M_Z(t) = e^{-\frac{t\mu}{\sigma}} M_X\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

Teorema de la Unicidad:

Si dos variables aleatorias cualesquiera tienen la misma $M_X(t)$ entonces las dos tienen la misma distribución de probabilidad y, de hecho, las dos son la misma variable.

La inversa también se verifica de manera que si dos variables aleatorias tienen la misma distribución, entonces también tienen la misma $M_X(t)$

***Ejemplo*:**

La función de cuantía de una v.a. es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} & \text{si } x=1,2,3,4,\\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Se pide:

a) Comprobar que es función de cuantía.

b) Obtener la función generatriz de momentos.

c) Utilizando dicha función, determinar los valores de la esperanza y la varianza.

Resolución:

a) Para que $f(x)$ sea función de cuantía ha de cumplir la dos propiedades siguientes:

1) $f(x)\geq 0 \qquad \forall x \qquad$ (se cumple)

2) $\sum_{i=1}^{i=k} f(x_i)=1$

$$\sum_{i=1}^{i=k} f(x_i)=\sum_{i=1}^{i=4}\frac{x}{10}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{3}{10}+\frac{4}{10}=1 \qquad \text{(se cumple)}$$

b) Función generatriz de momentos:

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\sum_x e^{tx} f(x)=e^{t1}\frac{1}{10}+e^{t2}\frac{2}{10}+e^{t3}\frac{3}{10}+e^{t4}\frac{4}{10}=$$

$$=\frac{1}{10}\left[e^{t}+2e^{2t}+3e^{3t}+4e^{4t}\right]$$

c) Esperanza y varianza:

$$M_X(t)=\frac{1}{10}\left[e^t+2e^{2t}+3e^{3t}+4e^{4t}\right]$$

$$E\left[X\right]=\mu=M_X^{(1)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\frac{1}{10}\left[e^t+4e^{2t}+9e^{3t}+16e^{4t}\right]$$

$$E\left[X\right]=\mu=\frac{dM_X(t)}{dt}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{10}\left[e^0+4e^0+9e^0+16e^0\right]=\frac{1}{10}\left[1+4+9+16\right]=3$$

$$Var\left[X\right]=\sigma^2=\mu_2'-\mu^2 \qquad \text{donde} \qquad \mu_2'=M_x^{(2)}(t)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}=\frac{1}{10}\left[e^t+8e^{2t}+27e^{3t}+64e^{4t}\right]$$

$$\mu_2'=\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\bigg|_{t=0}=\frac{1}{10}\left[e^0+8e^0+27e^0+64e^0\right]=\frac{1}{10}\left[1+8+27+64\right]=10$$

$$Var\left(X\right)=\sigma^2=\mu_2'-\mu^2=10-3^2=1.$$

5.3. DISTRIBUCIONES BIDIMENSIONALES (*X*,*Y*)

- En muchas ocasiones nos puede interesar estudiar el comportamiento conjunto de dos variables aleatorias (relación entre ellas)

  Ejemplos: Interés en la relación entre…

  - peso y la estatura de los individuos de una población
  - longitud y la dureza de las piezas fabricadas en un proceso de producción
  - renta y consumo de las familias
  - producción y costes en una empresa, etc.

- En estos casos consideraremos dos variables aleatorias X e Y distintas y estudiaremos su comportamiento conjunto a partir de distribución conjunta de probabilidad.

5.3.1. Variable aleatoria bidimensional discreta

Sean X e Y dos variables aleatorias discretas que tomas los valores $x_1, x_2, ..., x_k$ e $y_1, y_2, ..., y_m$, respectivamente. Llamamos *distribución de probabilidad bidimensional*, *distribución de probabilidad conjunta* o *función de cuantía conjunta* a la siguiente función:

$$f(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j) \qquad \forall i = 1, 2, ..., k \quad \forall j = 1, 2, ..., m$$

que asigna probabilidades a los diferentes valores conjuntos de la variable bidimensional (X, Y), de tal manera que se verifican las dos condiciones siguientes:

1. $f(x_i, y_j) \geq 0 \qquad \forall i = 1, 2, ..., k \qquad \forall j = 1, 2, ..., m$
2. $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} f(x_i, y_j) = 1$

- El cálculo de probabilidades a partir de esta función se realiza mediante un doble sumatorio. Así:

$$P(x \in A, y \in B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} f(x, y).$$

***Ejemplo*:**

Experimento aleatorio consistente en sacar dos naipes, sin reposición, de una baraja de 52 (4 palos x 13 naipes):

$X =$ "número de espadas en la primera extracción" con $X(E) = \{0,1\}$

$Y =$ "número de espadas en la segunda extracción" con $Y(E) = \{0,1\}$

X e Y son v.a. discretas. Su distribución de cuantía conjunta es:

$$f(0,0) = P(X = 0, Y = 0) = \frac{39}{52} \cdot \frac{38}{51} = 0,5588$$

$$f(1,0) = P(X = 1, Y = 0) = \frac{13}{52} \cdot \frac{39}{51} = 0,1912$$

$$f(0,1) = P(X = 0, Y = 1) = \frac{39}{52} \cdot \frac{13}{51} = 0,1912$$

$$f(1,1) = P(X = 1, Y = 1) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = 0,0588$$

En forma de tabla:

(x,y)	$f(x,y)$
(0,0)	0,5588
(1,0)	0,1912
(0,1)	0,1912
(1,1)	0,0588
	1

La representación gráfica de la función se corresponde con un diagrama de barras en el espacio tridimensional $\left[x, y; f(x, y)\right]$.

5.3.2. Variable aleatoria bidimensional continua

Sean X e Y dos variables aleatorias continuas. Consideremos ahora la v.a. bidimensional (X, Y) formada por esas dos variables. Llamamos *función de densidad conjunta de X e Y* a aquella función *f(x,y)* que cumpla las siguientes condiciones:

1. $f(x,y) \geq 0 \qquad -\infty < x < \infty \qquad -\infty < y < \infty$

2. $\int_x \int_y f(x,y)dxdy = 1$

- La función <u>*f(x,y)* no proporciona directamente probabilidades</u> sino que representa una superficie de densidad de probabilidad en el espacio tridimensional, de forma que el volumen encerrado bajo esa superficie es igual a la unidad.

- Ahora, las probabilidades se obtienen por doble integración y se corresponden con un volumen:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2; y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy.$$

- La probabilidad de que $\left(X,Y\right)$ tome un par de valores concretos (x,y) es siempre igual a cero, es decir, $P(X = x; Y = y) = 0$.

***Ejemplo*:**

Sea la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{para } 0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Se pide:

a) Comprobar que efectivamente es una función de densidad bidimensional:

1. $f(x,y)\ge 0 \qquad -\infty < x<\infty \qquad -\infty<y<\infty$ (se cumple)

2. $\int_x\int_y f(x,y)dxdy=1$

$$\int_x\int_y f(x,y)dxdy=\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1}1dxdy=\int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=0}^{1}1dy\right]dx=\int_{x=0}^{1}\left[y\right]_0^1dx=\int_{x=0}^{1}1dx=\left[x\right]_0^1=1$$

b) Calcular $P(0,2\le X\le 0,5;0,4\le Y\le 0,6)$.

$$P(0,2\le X\le 0,5;0,4\le Y\le 0,6)=\int_{x=0,2}^{0,5}\int_{y=0,4}^{0,6}f(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{x=0,2}^{0,5}\left[\int_{y=0,4}^{0,6}1dy\right]dx=\int_{x=0,2}^{0,5}\left[y\right]_{0,4}^{0,6}dx=\int_{x=0,2}^{0,5}0,2dx=\left[0,2x\right]_{0,2}^{0,5}=0,2[0,5-0,2]=0,06$$

5.3.3. Función de distribución bidimensional o conjunta

La función de distribución bidimensional conjunta de X e Y es aquella que asigna a todo par de números reales x e y la probabilidad de que, conjuntamente, X sea igual o menor que x, e Y sea igual o menor que y:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

En el caso de variables aleatorias discretas:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i \leq y} f(x_i, y_j)$$

Para variables aleatorias continuas:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

Propiedades:

1. $F(-\infty,-\infty) = F(-\infty, y) = F(x,-\infty) = 0.$

2. $F(+\infty,+\infty) = 1$

3. Es una función monótona no decreciente respecto a las dos variables:

   Si $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \leq F(x_2, y)$

   Si $y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$

4. Si (X,Y) es una v.a. bidimensional <u>continua</u>:

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

Ejemplo:

Para el ejemplo anterior en el que la función de densidad conjunta es:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{para } 0\le x\le 1\text{ , } 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Vamos a calcular la función de distribución y comprobar la cuarta propiedad.

a) Cálculo de la función de distribución:

$$\int_0^x\int_0^y f(x,y)dxdy=\int_0^x\int_0^y 1dx=\int_0^x\left[\int_0^y 1dy\right]dx=\int_0^x[y]_0^y dx=\int_0^x ydx=[yx]_0^x=yx.$$

Por tanto,

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & \text{para } x<0 \quad y<0\\ xy & 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\\ 1 & \text{en el resto}\end{cases}$$

b) Comprobación de la propiedad $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$:

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}=y$$

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{d\left[\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}\right]}{dy}=1=f(x,y).$$

5.3.4. Distribuciones marginales

- A partir de la distribución de probabilidad conjunta es posible obtener la distribución de probabilidad de cada una de las variables por separado. A estas distribuciones se les conoce como *distribuciones marginales*.

- En resumen:

	Variable aleatoria X	Variable aleatoria Y
Caso continuo:	$f_X(x)=\int_{y=-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$	$f_Y(y)=\int_{x=-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$
Caso discreto:	$f_X(x)=\sum_{y} f(x,y)$	$f_Y(y)=\sum_{x} f(x,y)$

***Ejemplo 1*:**

Sea la función de cuantía conjunta de X e Y:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+y}{21} & x=1,2,3 \quad y=1,2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Compruebe que es función de cuantía.
b) Calcule las funciones marginales de X y de Y.

Resolución:

a) Hay que verificar que:

1) $f(x_i,y_j)\geq 0 \qquad \forall i=1,2,\ldots,r \qquad \forall j=1,2,\ldots,s$ (se cumple)

2) $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} f(x_i,y_j)=1$ (se cumple)

b) Función de cuantía marginal de X:

$$f_X(x)=\sum_y f(x,y)=\sum_{y=1}^{y=2}\frac{x+y}{21}=\frac{x+1}{21}+\frac{x+2}{21}=\frac{2x+3}{21} \quad \text{con } \; x=1,2,3$$

Por tanto, la función de cuantía de X es: $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{21} & x=1,2,3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

Función de cuantía marginal de Y:

$$f_Y(y)=\sum_x f(x,y)=\sum_{x=1}^{x=3}\frac{x+y}{21}=\frac{1+y}{21}+\frac{2+y}{21}+\frac{3+y}{21}=\frac{6+3y}{21}=\frac{2+y}{7} \quad \text{con } \; y=1,2$$

Por tanto, la función de cuantía de Y es: $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2+y}{7} & y=1,2\\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$

***Ejemplo 2*:**

Dada la siguiente función de densidad conjunta, calcule las funciones de densidad marginales de X y de Y:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en el resto,}\end{cases}$$

Resolución:

Función de densidad marginal de la variable X:

$$f_X(x)=\int_y f(x,y)dy=\int_{y=0}^{1} 1dy=\left[y\right]_0^1=1 \quad \text{si} \quad 0\le x\le 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

Función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(y)=\int_x f(x,y)dx=\int_{x=0}^{1} 1dx=\left[x\right]_0^1=1 \quad \text{si} \quad 0\le y\le 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

5.3.5. Distribuciones condicionadas (o condicionales)

La ***distribución de probabilidad condicionada o condicional***, tanto para variables discretas como continuas, tiene la expresión:

$$f\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad \text{para } f_X(x)>0$$

y de igual forma,

$$f\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad \text{para } f_Y(y)>0.$$

En el caso de variables aleatorias discretas recibe el nombre de ***función de cuantía condicional***, mientras que en el caso de variables aleatorias continuas, ***función de densidad condicional***.

Ejemplo 1:

Sea la función de cuantía conjunta de X e Y:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{21} & x=1,2,3 \quad y=1,2\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Calcule la función de Y condicionada a X, demostrando que es función de cuantía.

Resolución:

Por cálculos anteriores, sabemos que:

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{21} & x=1,2,3\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Por tanto:

$$f\left(y/x\right)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{\frac{x+y}{21}}{\frac{2x+3}{21}}=\frac{x+y}{2x+3} \quad \text{para } x=1,2,3 \quad y=1,2.$$

Comprobemos que, efectivamente, $f\left(y/x\right)$ es una función de cuantía:

1) Es no negativa por tratarse de cociente de funciones de cuantía.

2) $\sum_y f(y/x)=\sum_y \frac{x+y}{2x+3}=\frac{x+1}{2x+3}+\frac{x+2}{2x+3}=\frac{2x+3}{2x+3}=1.$

***Ejemplo 2*:**

Sea la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en el resto,}\end{cases}$$

Calcule la función de X condicionada a Y, demostrando que es función de densidad.

Resolución:

$$f\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \quad \text{para } f_Y(y)>0.$$

Ya sabemos que $f_Y(y)=1$ si $0\le y\le 1$ y 0 en el resto.

Por tanto:

$$f\left(x/y\right)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{1}=1 \quad \text{para} \quad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1$$

Efectivamente es función de densidad:

1) Es no negativa

2) $\int_x f(x/y)dx=\int_{x=0}^{1} 1dx=\left[x\right]_0^1=1.$

5.3.6. Independencia estocástica de variables aleatorias

Sean X e Y son dos variables aleatorias, continuas o discretas, con función de densidad conjunta $f(x,y)$ y densidades marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Diremos que X e Y son independientes si y sólo si:

$f(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \quad \forall x,\ \forall y$ (condición 1)

$f(x/y) = f_X(x) \quad \forall x,\ \forall y$ (condición 2)

$f(y/x) = f_Y(y) \quad \forall x,\ \forall y$ (condición 3)

- **Propiedades equivalentes:** si se cumple una de ellas, se cumplen las demás. Para saber si dos variables aleatorias son independientes basta con comprobar una cualquiera de esas tres condiciones.

- En el caso de **independencia estocástica**, es posible simplificar el cálculo de probabilidades conjuntas ya que:

$$P\left(x_1 \le X \le x_2; y_1 \le Y \le y_2\right) = P\left(x_1 \le X \le x_2\right) P\left(y_1 \le Y \le y_2\right).$$

En el caso de variables aleatorias continuas:

$$P\left(x_1 \le X \le x_2; y_1 \le Y \le y_2\right) = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} f_X(x) f_Y(y)dxdy =$$

$$= \left[\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx\right]\left[\int_{y_1}^{y_2} f_Y(y)dy\right] = P\left(x_1 \le X \le x_2\right) P\left(y_1 \le Y \le y_2\right)$$

***Ejemplo*:**

Sea la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1\\ 0 & \text{en el resto,}\end{cases}$$

¿Son independientes las variables?

Resolución:

Las funciones marginales de X y de Y ya fueron calculadas con anterioridad. Recordemos aquellos cálculos:

Función de densidad marginal de la variable X:

$$f_X(x)=\int_y f(x,y)dy=\int_{y=0}^{1}1dy=\left[y\right]_0^1=1 \quad \text{si} \quad 0\le x\le 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

Función de densidad marginal de la variable Y:

$$f_Y(Y)=\int_x f(x,y)dx=\int_{x=0}^{1}1dx=\left[x\right]_0^1=1 \quad \text{si} \quad 0\le y\le 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

X e Y son independientes ya que $f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y) \;\; \forall x,\ \forall y$:

$$f(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)=1\cdot 1=1 \quad \forall x,\ \forall y.$$

5.3.7. Esperanza de una función de variables aleatorias

Para dos variable aleatorias X e Y que se distribuyen conjuntamente con distribución de probabilidad $f(x,y)$ podemos considerar la esperanza de una función $\varphi(X,Y)$ de esas variables:

$$E[\varphi(X,Y)] = \sum_x \sum_y \varphi(x,y)\, f(x,y) \qquad \text{(variables discretas)}$$

$$E[\varphi(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,y)\, f(x,y)dxdy \quad \text{(variables continuas).}$$

- Como sucedía en el caso unidimensional, en ambas situaciones el resultado es un número.
- Ojo: $\varphi(X,Y)$ es una v.a. unidimensional
- **Propiedades:**

1. Si $\varphi(X,Y) = g(X) + h(Y)$, entonces $E\left[\varphi(X,Y)\right] = E\left[g(X)\right] + E\left[h(Y)\right]$

Aplicaciones:

(1) $E\left[X+Y\right] = E\left[X\right] + E\left[Y\right]$

(2) $E\left[aX+bY\right] = aE\left[X\right] + bE\left[Y\right]$

(3) $E\left[a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n\right] = a_1E\left[X_1\right] + a_2E\left[X_2\right] + \ldots + a_nE\left[X_n\right]$

2. Si $\varphi(X,Y) = g(X)\cdot h(Y)$ y X e Y son independientes entonces:

$$E\left[\varphi(X,Y)\right] = E\left[g(X)\cdot h(Y)\right] = E\left[g(X)\right]\cdot E\left[h(Y)\right]$$

Aplicaciones:

(1) Si X e Y son independientes: $E\left[XY\right] = E\left[X\right]E\left[Y\right]$

(2) Si $X_1, X_2, \cdots, X_n$ son independientes:

$$E\left[X_1X_2\cdots X_n\right] = E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]\cdots E\left[X_n\right]$$

(3) Si X e Y son independientes y $W = X + Y$, entonces:

$$M_W(t) = M_X(t)\cdot M_Y(t)$$

5.3.8. Momentos de una distribución bidimensional

- Podemos definir los momentos para variables aleatorias bidimensionales. Estos momentos reciben el nombre genérico de ***momentos cruzados*** o ***momentos producto***.

Momento cruzado de orden (r,s) con respecto al origen se define como:

$$\mu'_{rs} = E[X^r Y^s] \qquad \text{para } r,s = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu'_{rs} = \sum_x \sum_y x^r y^s f(x,y) \qquad \text{para v.a.´s discretas}$$

$$\mu'_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^r y^s f(x,y)dxdy \qquad \text{para v.a.´s continuas}$$

Obsérvese que μ'_{rs} no es más que la esperanza de una función particular $\varphi(X,Y) = X^r Y^s$ de las variables aleatorias *X* e *Y*.

Momento cruzado de orden (r,s) con respecto a la media se define como:

$$\mu_{rs} = E[(X-\mu_X)^r (Y-\mu_Y)^s] \qquad \text{para } r,s = 0,1,2,\ldots$$

$$\mu_{rs} = \sum_x \sum_y (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y) \qquad \text{para v.a.´s discretas.}$$

$$\mu_{rs} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^r (y-\mu_Y)^s f(x,y)dxdy \qquad \text{para v.a.´s continuas.}$$

Obsérvese que μ_{rs} no es más que la esperanza de una función particular $\varphi(X,Y) = \left(X-\mu_X\right)^r \left(Y-\mu_Y\right)^s$ de las variables aleatorias *X* e *Y*.

A partir de estas expresiones se puede obtener cualquier momento para una sola de las variables. Así, por ejemplo:

$$\mu'_{10} = E[X^1Y^0] = E[X] = \mu_x$$
$$\mu'_{01} = E[X^0Y^1] = E[Y] = \mu_y$$
$$\mu'_{20} = E[X^2Y^0] = E[X^2]$$
$$\mu'_{02} = E[X^0Y^2] = E[Y^2]$$
$$\mu_{20} = E[(X-\mu_X)^2(Y-\mu_Y)^0] = E[(X-\mu_X)^2] = \sigma_X{}^2 = Var(X)$$
$$\mu_{02} = E[(X-\mu_X)^0(Y-\mu_Y)^2] = E[(Y-\mu_Y)^2] = \sigma_Y{}^2 = Var(Y)$$

Covarianza y coeficiente de correlación

$$\boxed{\mu_{11} = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] = Cov(X,Y) = \sigma_{XY}}$$

- Puede expresarse en función de los momentos respecto al origen:

$$\mu_{11} = E[XY] - E[X]E[Y] = \mu'_{11} - \mu'_{10}\mu'_{01} = \mu'_{11} - \mu_X\mu_Y.$$

- La covarianza proporciona una medida de la dependencia o asociación lineal entre las variables, es decir, del grado de relación lineal existente entre ellas.

  Si $Cov(X, Y) > 0 \Rightarrow$ relación lineal positiva

  Si $Cov(X, Y) < 0 \Rightarrow$ relación lineal negativa

- **Propiedades de la covarianza**:

1. Si X e Y son dos variables aleatorias independientes entonces $Cov(X,Y) = 0$.

Demostración:

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] \underbrace{=}_{\text{por independencia}} E[X]E[Y] - E[X]E[Y] = 0.$$

X e Y independientes $\Rightarrow$ $Cov(X,Y)=0$

$Cov(X,Y)=0$ $\Rightarrow$ no relación lineal pero no necesariamente independencia

$Cov(X,Y)\neq 0$ $\Rightarrow$ X e Y no son independientes.

2. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$.

3. $Cov(X,X)=Var(X)$.

4. $Cov(X,a)=0,$ para cualquier constante a.

5. Si X e Y son dos variables aleatorias:

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)-2Cov(X,Y)$$

Si X e Y son independientes, dado que $Cov(X,Y)=0$ se tiene que:

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$$

$$Var(X-Y)=Var(X)+Var(Y)$$

Coeficiente de correlación lineal

- La covarianza es una medida de intensidad de la relación lineal entre dos variables. Pero su valor se ve afectado por cambios de escala en las variables y no está acotado superiormente $(0 \leq Cov(X,Y) \leq +\infty)$.

- El coeficiente de correlación proporciona una medida adimensional de la fuerza de la relación lineal entre las variables:

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}}\sqrt{\mu_{02}}}}$$

- Se puede demostrar que si σ_X y σ_Y existen y son distintas de cero, entonces:

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$$

- Si $|\rho_{XY}|$ toma un valor próximo a la unidad, entonces existe una fuerte relación lineal entre *X* e *Y*, que será directa o positiva si $\rho_{XY} > 0$ e inversa o negativa si $\rho_{XY} < 0$.

- Si $\rho_{XY} = \pm 1$, entonces existe relación lineal exacta entre *X* e *Y* (positiva o negativa, respectivamente).

- Si ρ_{XY} está próximo a cero, la relación lineal entre las variables es débil.

- Si $\rho_{XY} = 0$ diremos que las variables no están correlacionadas linealmente, si bien puede que exista una relación no lineal entre ellas.

Si las variables aleatorias *X* e *Y* son independientes, entonces su correspondiente coeficiente de correlación es nulo, puesto que independencia implica que $\sigma_{XY} = 0$:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0.$$

Al igual que ocurría con la covarianza, la proposición inversa no es cierta.

***Ejemplo*:**

Sean las variables aleatorias *X* e *Y* con función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule el coeficiente de correlación lineal.

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Para calcular el coeficiente de correlación lineal necesitamos obtener las funciones de densidad marginales de las variables, para obtener sus respectivas desviaciones típicas y la covarianza:

$$f_X(x) = \int_y f(x,y)dy = \int_{y=0}^{1}(x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1; \ 0 \text{ en el resto.}$$

$$E[X] = \mu_X = \int_0^1 x f_X(x)dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^1 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2\left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1\left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \left[E[X]\right]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

De manera similar, se tiene que:

$$f_Y(y) = \int_x f(x,y)dx = \int_{x=0}^{1}(x+y)dy = \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^1 = y + \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 0 < y < 1; \ \ 0 \text{ en el resto.}$$

$$E[Y] = \mu_Y = \int_0^1 y f_Y(y)dy = \int_0^1 y\left(y + \frac{1}{2}\right)dy = \int_0^1\left(y^2 + \frac{y}{2}\right)dy = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

$$E\left[Y^2\right] = \int_0^1 y^2 f_Y(y)dy = \int_0^1 y^2\left(y + \frac{1}{2}\right)dy = \int_0^1\left(y^3 + \frac{y^2}{2}\right)dy = \left[\frac{y^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_Y^2 = E\left[Y^2\right] - \left[E[Y]\right]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}$$

Para calcular la covarianza necesitamos el momento cruzado (1,1) respecto al origen:

$$E[XY]=\int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dxdy=\int_0^1\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)dxdy=$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)dy\right]dx=\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right]_0^1$$

La covarianza viene dada por:

$$\sigma_{XY}=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

y el coeficiente de correlación:

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}}\cdot\sqrt{\frac{11}{144}}}=-\frac{1}{11}=-0,09.$$

Se concluye que existe una relación lineal inversa muy débil, ya que el coeficiente de correlación toma un valor muy próximo a cero.

Línea de regresión

- Supongamos que X e Y son dos variables aleatorias con distribución conjunta $f(x,y)$ y que la distribución condicional de Y, dado un valor $X=x$, la representamos por $f(y/x)$. Para el caso continuo se tiene que:

$$\text{línea de regresión} = \psi(x) = E\left[Y/x\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)dy$$

- En general, no es una constante sino que se trata de una función de x. Si hubiéramos obtenido $E\left[X/y\right]$, entonces la línea de regresión sería una función de y.

- Tanto en un caso como en otro, la línea de regresión puede entenderse como el lugar geométrico de las medias de las distribuciones condicionales cuyas densidades vienen dadas por $f(y/x)$ ó $f(x/y)$.

- La línea de regresión <u>no tiene porque ser una recta</u>, puede tomar cualquier forma. Pero <u>si fuera recta</u>, entonces su expresión cuando condicionamos a X sería:

$$\psi(x) = E\left[Y/x\right] = a + bx = \mu_Y + \rho_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$$

  que es una expresión similar a la manejada en Estadística Descriptiva.

- Obsérvese que si X e Y son variables aleatorias independientes se tiene que:

$$f(y/x) = f_Y(y) \qquad\qquad f(x/y) = f_X(x)$$

  de manera que las líneas de regresión se corresponden con las esperanzas no condicionadas y, por tanto, con constantes:

$$\psi(x) = E\left[Y/x\right] = E[Y]$$
$$\psi(y) = E\left[X/y\right] = E[X]$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Una v.a. *X* tiene la siguiente función de densidad:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{kx^2}{9} & 0\le x\le 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide:

a) Indique si se trata de una variable discreta o continua.

b) Determine el valor de *k* para que *f*(*x*) sea función de densidad. Represente dicha función.

c) Obtenga la función de distribución de *X* y represéntela gráficamente.

d) Calcule las siguientes probabilidades:
$P(0<X\le 1);P(X>3);P(|X|<2)$

e) Halle la media, la mediana y la moda de la distribución.

f) Obtenga la varianza, la desviación típica y el coeficiente de variación.

Resolución:

a) Tipo de variable:

La variable *X* es continua puesto que su función de densidad toma valores distintos de cero en un intervalo de la recta real: $0\le x\le 6$.

b) Valor de *k* y representación gráfica:

Deduciremos el valor de *k* teniendo en cuenta las propiedades que debe cumplir *f*(*x*) para ser función de densidad:

1) $f(x)=\dfrac{kx^2}{9}\ge 0 \quad\Rightarrow\quad k\ge 0.$

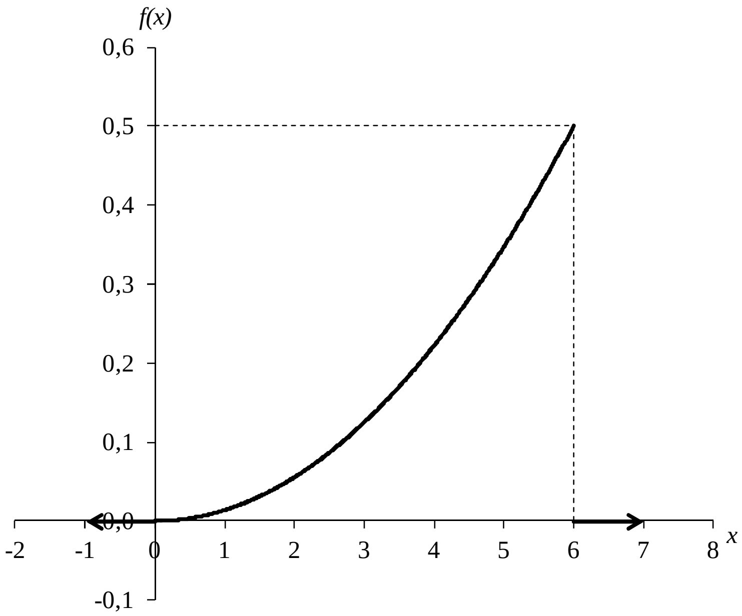
2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^6 \frac{kx^2}{9}dx=\frac{k}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6=\frac{k}{9}\left[\frac{6^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right]=8k \quad\Rightarrow\quad k=\frac{1}{8}$$

Por tanto, la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{72} & 0 \le x \le 6 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



c) Función de distribución y representación gráfica:

$$F(x) = P\left(X \le x\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si } 0 \le x \le 6 \\ 1 & \text{si } x > 6 \end{cases}$$

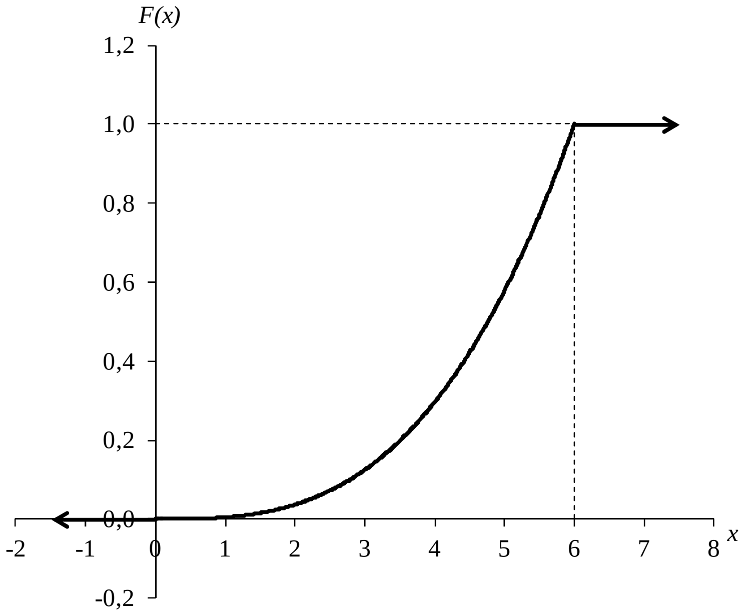
donde:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{t^2}{72}dt = \frac{1}{72}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{1}{216}x^3$$

Por tanto:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{1}{216}x^3 & \text{si } 0\le x\le 6 \\ 1 & \text{si } x>6 \end{cases}$$

Su representación gráfica es:



d) Cálculo de probabilidades:

Recordemos que, por ser X una v.a. continua, se cumple que:

$$P(a\le X\le b)=P(a\le X<b)=P(a<X\le b)=P(a<X<b)$$

- $P(0<X\le 1)=F(1)-F(0)=F(1)=\dfrac{1}{216}$
- $P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-F(3)=1-\dfrac{3^3}{216}=0{,}875$
- $P(|X|<2)=P(-2<X<2)=P(X\le 2)-\underbrace{P(X\le -2)}_{=0}=F(2)=\dfrac{2^3}{216}=0{,}037$

e) Media, mediana, moda:

- $E\left[X\right]=\mu=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{6} x\frac{x^2}{72}dx=\frac{1}{72}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^6=\frac{6^4}{4\cdot 72}=4,5$

- La Mediana (*Me*) es el valor de la variable que cumple la condición:

$$P\left(X\leq Me\right)=F(Me)=0,5$$

$$F(Me)=\frac{1}{216}\left(Me\right)^3=0,5 \quad \Rightarrow \quad Me=4,76$$

- La moda (*Mo*) es el valor de la variable para el que la función de densidad alcanza su valor máximo. De la inspección de la representación gráfica de esta función se deduce que $Mo=6$.

f) Varianza, desviación típica y coeficiente de variación:

- $\sigma^2=Var\left(X\right)=E\left[X^2\right]-\mu^2=\int_0^6 x^2\frac{x^2}{72}dx-(4,5)^2=\frac{1}{72}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^6-(4,5)^2=1,35$

- $\sigma=Desv\left(X\right)=+\sqrt{Var\left(X\right)}=+\sqrt{1,35}=1,162$

- $CV=\frac{\sigma}{\mu}\cdot 100=\frac{1,162}{4,5}\cdot 100=25,82\%.$

2. Obtenga la función generatriz de momentos y, a través de ella, la media y la varianza de la v.a. continua con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Resolución:

- Función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = E\left[e^{tx}\right] = \int_0^{+\infty} e^{tx} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{x(t-1)} dx =$$

$$= \frac{1}{t-1}\left[e^{x(t-1)}\right]_0^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si } t \geq 1 \\ \frac{1}{t-1}\left[e^{-\infty} - e^{0}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{t-1} = \frac{1}{1-t} & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

El valor de la variable auxiliar t que nos interesa para el cálculo de los momentos de la distribución es $t = 0$, que cumple la condición t<1. Por tanto, la función generatriz de momentos es:

$$M_X(t) = \frac{1}{1-t}$$

- Media:

$$\mu = E[X] = M'_X(0)$$

$$M'_X(t) = -\frac{(-1)}{(1-t)^2} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$\mu = M'_X(0) = 1$$

- Varianza:

$$\sigma^2 = Var(X) = \mu'_2 - \mu^2 = M''_X(0) - \mu^2$$

$$M''_X(t) = -\frac{2(1-t)}{(1-t)^4} \qquad M''_X(0) = 2$$

$$\sigma^2 = \mu'_2 - \mu^2 = 2 - 1^2 = 1.$$

3. La demanda diaria de un determinado producto (*X*, en miles de unidades) sigue la ley de probabilidad definida por la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Determine la probabilidad de que la demanda diaria:

a.1) no supere las 3500 unidades.

a.2) esté comprendida entre 635 y 1870 unidades.

b) Determine la mediana de *X* y explique su significado con respecto a la demanda del artículo.

<u>*Resolución*</u>:

$X \equiv$ "demanda diaria de un artículo (miles de unidades)"

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2} & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) Determinación de probabilidades:

- $P(X \le 3{,}5) = 1$, ya que 3,5 es mayor que el límite superior del intervalo en el que la función de densidad toma valores no negativos ($0 \le x \le 2$).

- $P(0{,}635 \le X \le 1{,}870) = \int_{0,635}^{1,870} \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left[x - \frac{x^2}{4}\right]_{0,635}^{1,870} = 0{,}462.$

b) Mediana

La mediana (*Me*) es el valor de la variable que cumple que $F(Me) = 0{,}5$:

$$F(x) = \int_0^x \left(1 - \frac{t}{2}\right) dt = \left[t - \frac{t^2}{4}\right]_0^x = x - \frac{x^2}{4}$$

$$F(x) = x - \frac{x^2}{4} = 0,5 \underbrace{\Rightarrow}_{\text{dos soluciones}} \begin{cases} x = 2,41 \\ x = 0,586 \end{cases}$$

De la condición que satisface la mediana se obtienen dos soluciones, pero se descarta el valor x=2,41 por situarse fuera del intervalo $0 \leq x \leq 2$, en el que la función de densidad toma valores no nulos. Por tanto, $Me = 0,586$. La probabilidad de que la demanda diaria sea menor o igual que 586 unidades es del 50%. Dicho de otro modo, esa es la cantidad que habría que poner cada día a la venta para tener una probabilidad del 50% de satisfacer la demanda.

4. En una determinada Comunidad Autónoma hay un millón de trabajadores en paro. Un estudio estadístico asegura que la duración en semanas (variable *X*) está bien modelizada por la siguiente distribución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^6}{x^5} & 0 < k < x < \infty \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Obtenga el valor de *k*.

b) Se desea pagar un subsidio especial a los parados de muy larga duración. ¿A partir de qué semana de permanencia en paro deberá pagarse para que cubra al 20% de los parados que llevan más semanas en paro?

c) El 40% de los trabajadores en paro son mujeres y la probabilidad de permanecer en paro más de tres semanas es de 0,25 para las mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de permanecer en paro más de tres semanas para los hombres?

d) ¿Cuál es la duración media del paro en esta Comunidad Autónoma? ¿Cuántos trabajadores en paro es probable que tengan una permanencia en paro menor a la media?

Resolución:

a) Valor de *k*:

Deduciremos el valor de *k* teniendo en cuenta las propiedades que debe cumplir *f*(*x*) para ser función de densidad:

$$1)\quad f(x) = \frac{2^6}{x^5} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad k \geq 0.$$

$$2)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{k}^{+\infty} \frac{2^6}{x^5}dx = 2^6\left[\frac{x^{-5+1}}{-5+1}\right]_k^{+\infty} = 2^6\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_k^{+\infty} = -2^4\left[x^{-4}\right]_k^{+\infty} = \frac{2^4}{k^4} \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

b) Valor x^* tal que $P(X \geq x^*) = 0,2$:

Tengamos en cuenta, por tratarse de una v.a. continua, se tiene que: $P(X \geq x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x)$. La función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{2}^{x} \frac{2^6}{t^5} dt = 2^6 \left[\frac{t^{-5+1}}{-5+1} \right]_2^x = 2^6 \left[\frac{t^{-4}}{-4} \right]_2^x = -2^4 \left[t^{-4} \right]_2^x = 1 - \frac{2^4}{x^4}.$$

Por tanto,

$$P(X \geq x^*) = 0,2 \quad \Rightarrow \quad F(x^*) = 0,8 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{2^4}{x^{*4}} = 0,8 \quad \Rightarrow \quad x^* \simeq 3 \text{ semanas.}$$

Debe pagarse el subsidio a partir de las tres semanas en paro, para cubrir al 20% de parados con mayor duración en el desempleo.

c) $P(X > 3 / H)$:

Definición de sucesos y datos:

$M =$ "mujer desempleada" $\quad P(M) = 0,4 \quad P(X > 3 / M) = 0,25$

$H =$ "hombre desempleado" $\quad P(H) = 1 - P(M) = 0,6$

Se pide $P(X > 3 / H)$. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total se tiene que:

$$P(X > 3) = P(X > 3 / H) \cdot P(H) + P(X > 3 / M) \cdot P(M)$$

Por los cálculos efectuados en el apartado anterior se sabe que $P(X > 3) = 0,2$. Por tanto,

$$0,2 = P(X > 3 / H) \cdot 0,6 + 0,25 \cdot 0,4 \quad \Rightarrow \quad P(X > 3 / H) = 0,166$$

d) Duración media del paro y número de trabajadores con duración de paro inferior a la media:

- Duración media del paro:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{2}^{+\infty} x\frac{2^6}{x^5}dx = 2^6\left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_2^{+\infty} = 2,67 \text{ semanas}$$

- Número de trabajadores con duración de paro inferior a la media:

Primero calcularemos la proporción de trabajadores desempleados con duración de paro inferior a la media:

$$P(X < 2,67) = F(2,67) \underbrace{=}_{\substack{F(x)\text{ calculada} \\ \text{en el apartado b)}}} 1 - \frac{2^4}{(2,67)^4} = 0,685$$

Teniendo en cuenta que existe un millón de desempleados, el número de trabajadores con duración de paro inferior a la media es 685000 trabajadores $(1000000 \cdot 0,685)$.

5. La distribución conjunta de dos variables aleatoria X e Y viene dada por la siguiente función de densidad:

$$f(x,y)=\begin{cases} c(2x^2+3y) & x=0,1,2;\ y=1,2;\ x+y\leq 3 \\ 0 & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Se pide:

a) El valor de c para que $f(x,y)$ sea función de densidad.

b) La función de densidad marginal de X.

c) Calcule las siguientes probabilidades:

$P(X=2)$ $P(X=3)$ $P(X=2,Y=1)$ $P(X=2,Y=2)$

d) Determine la distribución de probabilidad de la variable Y condicionada por el valor 0 de X. ¿Son las variables X e Y independientes?

<u>*Resolución*</u>:

a) Valor de c:

Deduciremos el valor de c teniendo en cuenta las propiedades que debe cumplir $f(x,y)$ para ser función de densidad:

1) $f(x,y)=c(2x^2+3y)\geq 0 \quad\Rightarrow\quad c\geq 0.$

2) $\sum_x\sum_y f(x,y)=1 \quad\Rightarrow \sum_x\sum_y c(2x^2+3y)=1$

Para obtener el valor de c que cumple esta segunda condición es conveniente ayudarnos de una tabla de probabilidades conjuntas. A la hora de construirla es necesario tener presente que los valores de X y de Y con probabilidad no nula son $x=0,1,2;\ y=1,2$ con $x+y\leq 3$:

$X \backslash Y$	1	2	
0	$3c$	$6c$	
1	$5c$	$8c$	
2	$11c$	0	

La suma de esas probabilidades conjuntas tiene que ser igual a la unidad. Por tanto:

$$\underbrace{3c+5c+11c}_{Y=1}+\underbrace{6c+8c}_{Y=2}=1 \quad \Rightarrow \quad c=\frac{1}{33}$$

b) Función de densidad marginal de *X*:

$$f_X(x)=\sum_y f(x,y)$$

Para x=0 y x=1:

$$f_X(x)=\frac{1}{33}\sum_{y=1}^{y=2}(2x^2+3y)=\frac{1}{33}\left[2x^2+3+2x^2+6\right]=\frac{1}{33}\left[4x^2+9\right]$$

Para x=2: $$f_X(x)=f(2,1)=\frac{1}{33}[8+3]=\frac{11}{33}=\frac{1}{3}$$

Obsérvese que se cumple que $\sum_x f_X(x)=1.$

c) Cálculo de probabilidades:

$$P(X=2)=f_X(2)=\frac{1}{3}$$

$$P(X=3)=f_X(3)=0$$

$$P(X=2,Y=1)=f(2,1)=\frac{1}{3}$$

$$P(X=2,Y=2)=0$$

d) $f(Y/x=0)$. ¿Son las variables independientes?

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

- $f(Y/x=0)=\dfrac{f(0,y)}{f_X(0)}=\dfrac{\frac{3y}{33}}{\frac{9}{33}}=\dfrac{1}{3}y$ para $y=1,2$ y 0 en el resto.

- Las variables son independientes si se cumple cualquiera de estas tres condiciones para todo x y para todo y:

1) $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 2) $f_X(x) = f(X/Y = y)$ 3) $f_Y(y) = f(Y/X = x)$

Si encontramos un par de valores (x, y) para los que no se cumplen concluiremos que las variables no son independientes. Para el par (2,1) se tiene que:

$$P(X = 2, Y = 1) = f(2,1) = \frac{1}{3} \quad \text{[apartado c)]}$$

$$P(X = 2) = f_X(2) = \frac{1}{3} \quad \text{[apartado c)]}$$

$$P(Y = 1) = f_Y(1) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x,y) = \sum_{x=0}^{x=2} \frac{1}{33}(2x^2 + 3) = \frac{19}{33}$$

Vemos que $f(2,1) = \frac{1}{3} \neq f_X(2) \cdot f_Y(1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{33}$. Por tanto, las variables aleatorias no son independientes.

6. Las variables aleatorias X e Y representan, respectivamente, las cuotas de mercado de dos productos A y B fabricados por una misma empresa. Supongamos que su función de densidad conjunta es:

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & 0 \le x \le 1;\ \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Compruebe que $f(x,y)$ es función de densidad.

b) Calcule los valores esperados de las cuotas de mercado. Proporcione sendas medidas relativas de dispersión y comente los resultados.

c) Obtenga la probabilidad de que la cuota de mercado del producto A sea igual a la cuota de mercado del producto B y ambas iguales a 0,5.

d) Obtenga la función de densidad de la cuota de mercado del producto A condicionada a una cuota de mercado para el producto B de 0,5.

e) ¿Son las cuotas de mercado de ambos productos independientes entre sí?

f) Obtenga el coeficiente de correlación lineal entre las variables. Comente el resultado.

g) ¿Cuál sería el valor esperado de la cuota de mercado del producto B para una cuota de mercado del 20% para el producto A?

Resolución:

a) Comprobación de que $f(x,y)$ es función de densidad:

Debemos comprobar si $f(x,y)$ cumplen las siguientes condiciones:

1) $f(x,y) \ge 0$. Se cumple para $0 \le x \le 1;\ \ 0 \le y \le 1$

2) $\int_x \int_y f(x,y)dxdy = 1$. Se cumple ya que:

$$\int_x \int_y f(x,y)dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=1} (x+y)dxdy = \int_{x=0}^{x=1} \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_{x=0}^{x=1} \left[x + \frac{1}{2} \right] dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x \right]_{x=0}^{x=1} = 1$$

Por tanto, $f(x,y)$ es función de densidad.

b) Valores esperados de las cuotas de mercado y medidas relativas de dispersión.

- Valor esperado de la cuota de mercado del producto *A*:

$$E[X] = \mu_X = \int_x x f_X(x) dx$$

$$f_X(x) = \int_y f(x,y)dy = \int_{y=0}^{1} (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = x + \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 0 < x < 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

$$E[X] = \mu_X = \int_0^1 x f_X(x) dx = \int_0^1 x\left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{7}{12}$$

- Coeficiente de variación de *X*:

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \cdot 100$$

$$E\left[X^2\right] = \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{12}$$

$$\sigma_X^2 = E\left[X^2\right] - \left[E[X]\right]^2 = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12} \right)^2 = \frac{11}{144}$$

$$CV_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \cdot 100 = \frac{+\sqrt{\frac{11}{144}}}{\frac{7}{12}} \cdot 100 = \frac{+\sqrt{11}}{7} \cdot 100 = 47{,}38\%$$

De manera similar, podemos obtener la cuota de mercado esperada del producto *B* y su coeficiente de variación. Pero si observamos que en la función de densidad conjunta las dos variables “entran” de la misma forma, podemos concluir por “simetría” que las dos variables tienen las mismas características (posición, dispersión, etc.). Por tanto:

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad 0 < y < 1 \quad \text{y} \quad 0 \text{ en el resto.}$$

$$E[Y] = \mu_Y = \frac{7}{12} \qquad E\left[Y^2\right] = \frac{5}{12} \qquad \sigma_Y^2 = \frac{11}{144} \qquad CV_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \cdot 100 = 47,38\%$$

Vemos que en ambos casos la desviación típica supone menos del 50% de la media, por lo que concluimos que ambas cuotas medias son representativas de sus respectivas distribuciones.

c) $P(X = 0,5; Y = 0,5)$

Teniendo en cuenta que las variables aleatorias son continuas, la probabilidad solicitada es igual a cero.

d) $f(x / Y = 0,5):$

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{x+y}{y+\frac{1}{2}} \quad 0 \le x \le 1 \quad 0 \le y \le 1$$

$$f(x / Y = 0,5) = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2} \quad \text{para } 0 \le x \le 1$$

e) Comprobación de independencia:

Las variables son independientes si se cumple cualquiera de estas tres condiciones para todo *x* y para todo *y*:

1) $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ 2) $f_X(x) = f(X / Y = y)$ 3) $f_Y(y) = f(Y / X = x)$

Comprobemos si se cumple la primera de ellas:

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) \neq x + y = f(x,y)$$

Por tanto, las cuotas de mercado no son independientes.

f) Coeficiente de correlación lineal:

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y} \quad \text{donde} \quad \sigma_{XY}=E[XY]-\mu_X\mu_Y$$

$$E[XY]=\int_0^1\int_0^1 xyf(x,y)dxdy=\int_0^1\int_0^1 xy(x+y)dxdy=\int_0^1\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)dxdy=$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^1\left(x^2y+xy^2\right)dy\right]dx=\int_{x=0}^{x=1}\left[\frac{x^2y^2}{2}+\frac{xy^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}dx=$$

$$=\int_{x=0}^{x=1}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{6}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

La covarianza viene dada por:

$$\sigma_{XY}=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{1}{3}-\frac{7}{12}\cdot\frac{7}{12}=-\frac{1}{144}$$

y el coeficiente de correlación:

$$\rho_{XY}=\frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}}\cdot\sqrt{\frac{11}{144}}}=-\frac{1}{11}=-0,09.$$

Las variables presentan una asociación lineal negativa pero muy débil, puesto que el coeficiente está muy próximo a cero.

g) $E[Y/x=0,2]$

Se solicita el valor que toma la línea de regresión de *Y* sobre *X* para *x*=2. Vamos a obtener la expresión de la línea de regresión y después particularizaremos para ese valor:

$$\mu_{Y/X}=E[Y/X]=\int_y yf(y/x)dy$$

$$f(y/x)=\frac{f(y,x)}{f_X(x)}=\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}} \qquad 0\leq x\leq 1 \quad 0\leq y\leq 1$$

$$\mu_{Y/X}=\int_{y=0}^{y=1} y\frac{x+y}{x+\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\int_{y=0}^{y=1} y(x+y)dy=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left[\frac{y^2}{2}x+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1}=$$

$$=\frac{1}{x+\frac{1}{2}}\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right]=\frac{3x+2}{6x+3}$$

Por tanto, $\mu_{Y/X}=\dfrac{3x+2}{6x+3}$ para $0\leq x\leq 1$. Obsérvese que la línea de regresión no es una línea recta y que sólo es función de la variable *X*.

Para *x*=2 se tiene que:

$$E\left[Y/x=0,2\right]=\mu_{Y/X=0,2}=\frac{3\cdot 0,2+2}{6\cdot 0,2+3}=0,619.$$

Vemos que la cuota de mercado esperada del producto *B* dada una cuota de mercado del 20% para el producto *A* es del 61,9%.