ESTIMACIÓN

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Mª Eugenia Cruces, Salvador J. Molina y Mª Dolores Sarrión

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Estadística y Econometría
Parcialmente financiado a través del PIE13-024 (UMA).

6 de julio de 2014

ESTIMACIÓN PUNTUAL

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

CONTEXTO

CONTEXTO

Una v.a. X con densidad $f(x, \theta)$, que identificamos con la población

CONTEXTO

Una v.a. X con densidad $f(x, \theta)$, que identificamos con la población

θ parámetro desconocido

CONTEXTO

Una v.a. X con densidad $f(x, \theta)$, que identificamos con la población

θ parámetro desconocido

$X_1, ..., X_n$ una m.a.s. de la población (X)

CONTEXTO

Una v.a. X con densidad $f(x, \theta)$, que identificamos con la población

θ parámetro desconocido

$X_1, ..., X_n$ una m.a.s. de la población (X)

Problema

Extraer información sobre θ a partir de la muestra

CONCEPTOS BÁSICOS

Un Estimador de un parámetro poblacional desconocido es:

CONCEPTOS BÁSICOS

Un Estimador de un parámetro poblacional desconocido es:

- Una variable aleatoria que resume la información contenida en la muestra.

CONCEPTOS BÁSICOS

Un Estimador de un parámetro poblacional desconocido es:

- Una variable aleatoria que resume la información contenida en la muestra.
  - Estimador $\equiv$ Estadístico

CONCEPTOS BÁSICOS

Un Estimador de un parámetro poblacional desconocido es:

- Una variable aleatoria que resume la información contenida en la muestra.
  - Estimador $\equiv$ Estadístico
- En cada muestra observada el estimador toma un valor numérico.

CONCEPTOS BÁSICOS

Un Estimador de un parámetro poblacional desconocido es:

- Una variable aleatoria que resume la información contenida en la muestra.
  - Estimador $\equiv$ Estadístico
- En cada muestra observada el estimador toma un valor numérico.
  - El valor numérico del estimador en una muestra observada es una estimación del parámetro desconocido.

CONCEPTOS BÁSICOS

Para estimar un parámetro se pueden utilizar distintos estimadores.

CONCEPTOS BÁSICOS

Para estimar un parámetro se pueden utilizar distintos estimadores.

- ¿Cuál es el mejor?

CONCEPTOS BÁSICOS

Para estimar un parámetro se pueden utilizar distintos estimadores.

- ¿Cuál es el mejor?
- ¿Qué criterio seguimos para elegir a uno en detrimento de los demás?

CONCEPTOS BÁSICOS

Para estimar un parámetro se pueden utilizar distintos estimadores.

- ¿Cuál es el mejor?
- ¿Qué criterio seguimos para elegir a uno en detrimento de los demás?
    - No existe un criterio único que permita decidir cuál es el mejor en todas las circunstancias.

CONCEPTOS BÁSICOS

Para estimar un parámetro se pueden utilizar distintos estimadores.

- ¿Cuál es el mejor?
- ¿Qué criterio seguimos para elegir a uno en detrimento de los demás?
  - No existe un criterio único que permita decidir cuál es el mejor en todas las circunstancias.
- La elección se basa en el análisis de ciertas propiedades que consideramos deseables para los "buenos estimadores".

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

PROPIEDADES

Entre las propiedades que se consideran deseables destacamos:

PROPIEDADES

Entre las propiedades que se consideran deseables destacamos:

- INSESGADEZ

PROPIEDADES

Entre las propiedades que se consideran deseables destacamos:

- INSESGADEZ
- EFICIENCIA

PROPIEDADES

Entre las propiedades que se consideran deseables destacamos:

- INSESGADEZ
- EFICIENCIA
- CONSISTENCIA EN MEDIA CUADRÁTICA

ESTIMACIÓN PUNTUAL

INSESGADEZ

Insesgadez

INSESGADEZ

Insesgadez

Un estimador $\widehat{\theta}$ es insesgado para estimar el parámetro θ si

$$E\left[\widehat{\theta}\right] = \theta, \quad \theta \in \Omega.$$

INSESGADEZ

Insesgadez

Un estimador $\widehat{\theta}$ es insesgado para estimar el parámetro θ si

$$E\left[\widehat{\theta}\right] = \theta, \quad \theta \in \Omega.$$

Fijado el problema de estimación,

- $\Omega \quad = \quad$ Valores admisibles para el parámetro.

INSESGADEZ

Insesgadez

Un estimador $\widehat{\theta}$ es insesgado para estimar el parámetro θ si

$$E\left[\widehat{\theta}\right] = \theta, \quad \theta \in \Omega.$$

Fijado el problema de estimación,

- $\Omega \quad = \quad$ Valores admisibles para el parámetro.

$$E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta$$

INSESGADEZ

Insesgadez

Un estimador $\widehat{\theta}$ es insesgado para estimar el parámetro θ si

$$E\left[\widehat{\theta}\right] = \theta, \quad \theta \in \Omega.$$

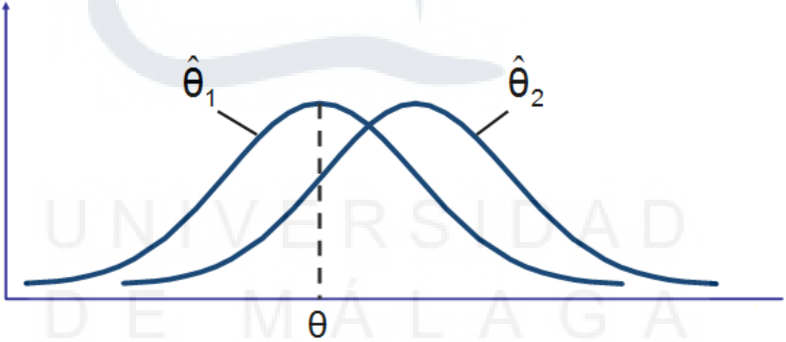
Fijado el problema de estimación,

- $\Omega \quad = \quad$ Valores admisibles para el parámetro.

$$E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta \quad \equiv \quad Sesgo\left(\widehat{\theta}\right).$$

Estimación puntual:Propiedades

$\widehat{\theta}_1$ es insesgado para θ y $\widehat{\theta}_2$ es sesgado para θ



Estimación puntual:Propiedades

Estimación puntual:Propiedades

- La media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional
  - $\overline{X} \longleftrightarrow$ Media muestral
  - $\mu \longleftrightarrow$ Media poblacional
  - $E\left[\overline{X}\right] = \mu$

Estimación puntual:Propiedades

- La media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional
  - $\overline{X} \longleftrightarrow$ Media muestral
  - $\mu \longleftrightarrow$ Media poblacional
  - $E\left[\overline{X}\right] = \mu$
- La proporción muestral es un estimador insesgado de la proporción poblacional
  - $\widehat{P} \longleftrightarrow$ Proporción muestral
  - $p \longleftrightarrow$ Proporción poblacional
  - $E\left[\widehat{P}\right] = p$

Estimación puntual:Propiedades

- La varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional
  - $S^2 \longleftrightarrow$ Varianza muestral
  - $\sigma^2 \longleftrightarrow$ Varianza poblacional
  - $E\left[S^2\right] = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$

Estimación puntual:Propiedades

- La varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional
  - $S^2 \longleftrightarrow$ Varianza muestral
  - $\sigma^2 \longleftrightarrow$ Varianza poblacional
  - $E\left[S^2\right] = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2$
- La cuasivarianza muestral es un estimador insesgado de la varianza poblacional
  - $\widehat{S}^2 \longleftrightarrow$ Cuasivarianza muestral
  - $\sigma^2 \longleftrightarrow$ Varianza poblacional
  - $E\left[\widehat{S}^2\right] = \sigma^2$

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Estimación puntual:Propiedades

Entre varios estimadores insesgados es preferible el que tiene menor varianza.

Estimación puntual:Propiedades

Entre varios estimadores insesgados es preferible el que tiene menor varianza. Pero, no siempre hay uno!!!

Estimación puntual:Propiedades

Entre varios estimadores insesgados es preferible el que tiene menor varianza. Pero, no siempre hay uno!!!

Eficiencia relativa

$\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados para θ, $\theta \in \Omega$.
$\widehat{\theta}_1$ es más eficiente que $\widehat{\theta}_2$ si,

Estimación puntual:Propiedades

Entre varios estimadores insesgados es preferible el que tiene menor varianza. Pero, no siempre hay uno!!!

Eficiencia relativa

$\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados para θ, $\theta \in \Omega$.
$\widehat{\theta}_1$ es más eficiente que $\widehat{\theta}_2$ si, para todo $\theta \in \Omega$,

$$Var\left(\widehat{\theta}_1\right) \leq Var\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

Estimación puntual:Propiedades

Entre varios estimadores insesgados es preferible el que tiene menor varianza. Pero, no siempre hay uno!!!

Eficiencia relativa

$\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados para θ, $\theta \in \Omega$.
$\widehat{\theta}_1$ es más eficiente que $\widehat{\theta}_2$ si, para todo $\theta \in \Omega$,

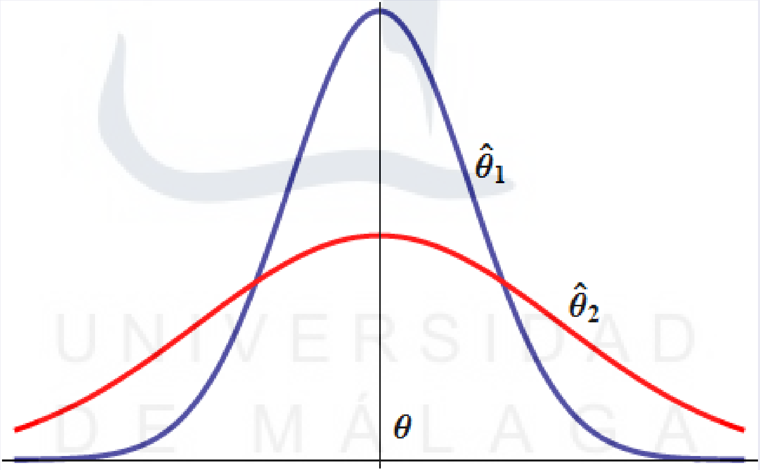
$$Var\left(\widehat{\theta}_1\right) \leq Var\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

siendo

$$Var\left(\widehat{\theta}_1\right) < Var\left(\widehat{\theta}_2\right),$$

para algún $\theta_0 \in \Omega$.

$E[\widehat{\theta}_1] = E[\widehat{\theta}_2] = \theta$, pero $Var(\widehat{\theta}_1) < Var(\widehat{\theta}_2)$, luego $\widehat{\theta}_1$ es mejor que $\widehat{\theta}_2$



Estimación puntual:Propiedades

Eficiencia relativa

$\widehat{\theta}_1$ y $\widehat{\theta}_2$ dos estimadores insesgados para θ, $\theta \in \Omega$.

- Eficiencia relativa de $\widehat{\theta}_1$ frente a $\widehat{\theta}_2 = \dfrac{Var\left(\widehat{\theta}_2\right)}{Var\left(\widehat{\theta}_1\right)}$

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

Estimación puntual: Propiedades

$\widehat{\theta}$ estimador insesgado para el parámetro θ, $\theta \in \Omega$.

Estimación puntual: Propiedades

$\widehat{\theta}$ estimador insesgado para el parámetro θ, $\theta \in \Omega$.

Eficiencia

$\widehat{\theta}$ es eficiente para θ si, para cualquier otro $\widehat{\theta}_i$ insesgado para θ,

$$Var\left(\widehat{\theta}\right) \leq Var\left(\widehat{\theta}_i\right), \quad \text{para todo } \theta \in \Omega.$$

Estimación puntual: Propiedades

$\widehat{\theta}$ estimador insesgado para el parámetro θ, $\theta \in \Omega$.

Eficiencia

$\widehat{\theta}$ es eficiente para θ si, para cualquier otro $\widehat{\theta}_i$ insesgado para θ,

$$Var\left(\widehat{\theta}\right) \leq Var\left(\widehat{\theta}_i\right), \quad \text{para todo } \theta \in \Omega.$$

El estimador eficiente es el óptimo, con el criterio de mínima varianza, en la clase de los estimadores insesgados

Acotación de Frechet-Cramer-Rao

Si $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ es un estimador insesgado para el parámetro θ, entonces, bajo ciertas condiciones de regularidad,

$$Var\left(\widehat{\theta}\right) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]},$$

siendo $f(x;\theta)$ la función de densidad de la variable aleatoria X.

Acotación de Frechet-Cramer-Rao

Si $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ es un estimador insesgado para el parámetro θ, entonces, bajo ciertas condiciones de regularidad,

$$Var\left(\widehat{\theta}\right) \geq \frac{1}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]},$$

siendo $f(x;\theta)$ la función de densidad de la variable aleatoria X.

Si la varianza de un estimador insesgado es igual a la cota, entonces el estimador es eficiente.

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Estimación puntual: Propiedades

En general, el criterio de óptimo análogo al de mínima varianza para los insesgados es el de

Estimación puntual: Propiedades

En general, el criterio de óptimo análogo al de mínima varianza para los insesgados es el de

MÍNIMO ECM

Estimación puntual: Propiedades

En general, el criterio de óptimo análogo al de mínima varianza para los insesgados es el de

MÍNIMO ECM

Pero, ¿cómo se define el ECM?

Estimación puntual: Propiedades

En general, el criterio de óptimo análogo al de mínima varianza para los insesgados es el de

MÍNIMO ECM

Pero, ¿cómo se define el ECM?

Definición

Para un estimador, $\widehat{\theta}$, de un parámetro θ se define su error cuadrático medio, ECM$(\widehat{\theta})$, como

$$ECM(\widehat{\theta}) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Estimación puntual: Propiedades

$$ECM(\widehat{\theta}) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Estimación puntual: Propiedades

$$ECM(\widehat{\theta}) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Cuantifica la dispersión de la distribución del estimador con respecto al parámetro que se pretende estimar.

Estimación puntual: Propiedades

$$ECM(\widehat{\theta}) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Cuantifica la dispersión de la distribución del estimador con respecto al parámetro que se pretende estimar.

El estimador será tanto mejor cuanto menor sea esa dispersión

Eso significa que las diferencias entre el parámetro y las estimaciones que el estimador proporciona (los valores del estimador) son “pequeñas".

Estimación puntual: Propiedades

$$ECM(\widehat{\theta}) = E\left[\left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2\right]$$

Cuantifica la dispersión de la distribución del estimador con respecto al parámetro que se pretende estimar.

El estimador será tanto mejor cuanto menor sea esa dispersión

Eso significa que las diferencias entre el parámetro y las estimaciones que el estimador proporciona (los valores del estimador) son "pequeñas".

El estimador ÓPTIMO con este criterio es el de menor ECM.

Estimación puntual: Propiedades

El error cuadrático medio de un estimador y su varianza están relacionados:

Estimación puntual: Propiedades

El error cuadrático medio de un estimador y su varianza están relacionados:

Si $\widehat{\theta}$ es un estimador del parámetro θ, entonces

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left(\widehat{\theta}\right) + \left(E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta\right)^2.$$

Estimación puntual: Propiedades

El error cuadrático medio de un estimador y su varianza están relacionados:

Si $\widehat{\theta}$ es un estimador del parámetro θ, entonces

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left(\widehat{\theta}\right) + \left(E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta\right)^2.$$

- Si el estimador es insesgado, su error cuadrático medio y su varianza son iguales.

Estimación puntual: Propiedades

El error cuadrático medio de un estimador y su varianza están relacionados:

Si $\widehat{\theta}$ es un estimador del parámetro θ, entonces

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left(\widehat{\theta}\right) + \left(E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta\right)^2.$$

- Si el estimador es insesgado, su error cuadrático medio y su varianza son iguales.
- Si un estimador insesgado tiene menor varianza que uno sesgado, con el criterio del ECM es preferible el insesgado.

Estimación puntual: Propiedades

El error cuadrático medio de un estimador y su varianza están relacionados:

Si $\widehat{\theta}$ es un estimador del parámetro θ, entonces

$$ECM\left(\widehat{\theta}\right) = Var\left(\widehat{\theta}\right) + \left(E\left[\widehat{\theta}\right] - \theta\right)^2.$$

- Si el estimador es insesgado, su error cuadrático medio y su varianza son iguales.
- Si un estimador insesgado tiene menor varianza que uno sesgado, con el criterio del ECM es preferible el insesgado.
- El estimador eficiente es, para la clase de estimadores insesgados, ÓPTIMO con el criterio basado en el ECM.

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

Estimación puntual: Propiedades

SUFICIENCIA

Estimación puntual: Propiedades

SUFICIENCIA

Definición

Un estimador $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ *es suficiente para un parámetro* θ *si, y sólo si, la distribución de la muestra condicionada por el estimador no depende del parámetro.*

Estimación puntual: Propiedades

SUFICIENCIA

Definición

Un estimador $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ *es suficiente para un parámetro* θ *si, y sólo si, la distribución de la muestra condicionada por el estimador no depende del parámetro.*

EJEMPLO

Estimación puntual: Propiedades

SUFICIENCIA

Definición

Un estimador $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ *es suficiente para un parámetro* θ *si, y sólo si, la distribución de la muestra condicionada por el estimador no depende del parámetro.*

EJEMPLO

Ejemplo

Si $(X_1, ..., X_n)$ *es una m.a.s. de* $X \sim B(p)$*, el total muestral* $(T = X_1 + \cdots + X_n)$ *es suficiente para* p*.*

Estimación puntual: Propiedades

Caracterización de la suficiencia (Neyman)

Estimación puntual: Propiedades

Caracterización de la suficiencia (Neyman)

Teorema

$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si, y sólo si, la función de densidad de la muestra, $f(x_1, ...x_n; \theta)$ se puede factorizar del siguiente modo

Estimación puntual: Propiedades

Caracterización de la suficiencia (Neyman)

Teorema

$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si, y sólo si, la función de densidad de la muestra, $f(x_1, ...x_n; \theta)$ se puede factorizar del siguiente modo

$$f(x_1, ...x_n; \theta) = g(\widehat{\theta}(x_1, ..., x_n), \theta) \cdot h(x_1, ..., x_n),$$

donde h es independiente de θ.

Estimación puntual: Propiedades

Caracterización de la suficiencia (Neyman)

Teorema

$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, ..., X_n)$ es suficiente para un parámetro θ si, y sólo si, la función de densidad de la muestra, $f(x_1, ...x_n; \theta)$ se puede factorizar del siguiente modo

$$f(x_1, ...x_n; \theta) = g(\widehat{\theta}(x_1, ..., x_n), \theta) \cdot h(x_1, ..., x_n),$$

donde h es independiente de θ.

EJEMPLO

Ejemplo

Si $(X_1, \ldots, X_n)$ es una m.a.s. de $X \sim N(\mu, 1)$, la media muestral

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Entre las propiedades de tipo asintótico (muestras de tamaño grande) destacamos:

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Entre las propiedades de tipo asintótico (muestras de tamaño grande) destacamos:

- Insesgadez asintótica

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Entre las propiedades de tipo asintótico (muestras de tamaño grande) destacamos:

- Insesgadez asintótica
- Consistencia en media cuadrática

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ estimador.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ estimador.
- Al hacer variar el tamaño de la muestra, el estimador puede verse como:
  - Una sucesión de estimadores $\equiv \left\{\widehat{\theta}_n\right\}$

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ estimador.
- Al hacer variar el tamaño de la muestra, el estimador puede verse como:
  - Una sucesión de estimadores $\equiv \left\{\widehat{\theta}_n\right\}$

Insesgadez asintótica

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado para θ si

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ estimador.
- Al hacer variar el tamaño de la muestra, el estimador puede verse como:
  - Una sucesión de estimadores $\equiv \left\{\widehat{\theta}_n\right\}$

Insesgadez asintótica

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado para θ si

- Al aumentar el tamaño de muestra el sesgo tiende a cero.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

- $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ estimador.
- Al hacer variar el tamaño de la muestra, el estimador puede verse como:
  - Una sucesión de estimadores $\equiv \left\{\widehat{\theta}_n\right\}$

Insesgadez asintótica

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente insesgado para θ si

- Al aumentar el tamaño de muestra el sesgo tiende a cero.
  - $E\left[S^2\right] = \dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2$

ESTIMACIÓN PUNTUAL

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

CONSISTENCIA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente para θ si converge en probabilidad a θ. Es decir,

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

CONSISTENCIA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente para θ si converge en probabilidad a θ. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \text{para todo} \varepsilon > 0.$$

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

CONSISTENCIA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente para θ si converge en probabilidad a θ. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \text{para todo} \varepsilon > 0.$$

La consistencia del estimador garantiza que tomando una muestra suficientemente grande con la estimación no nos desviamos mucho del parámetro que se pretende estimar.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

CONSISTENCIA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente para θ si converge en probabilidad a θ. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\widehat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1, \text{para todo} \varepsilon > 0.$$

La consistencia del estimador garantiza que tomando una muestra suficientemente grande con la estimación no nos desviamos mucho del parámetro que se pretende estimar.

- La media muestral es un estimador consistente de la media poblacional

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Consistencia en media cuadrática

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente en media cuadrática para θ si

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Consistencia en media cuadrática

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente en media cuadrática para θ si

- Es asintóticamente insesgado.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Consistencia en media cuadrática

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente en media cuadrática para θ si

- Es asintóticamente insesgado.
- Su varianza tiende a cero al aumentar el tamaño de muestra.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Consistencia en media cuadrática

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente en media cuadrática para θ si

- Es asintóticamente insesgado.
- Su varianza tiende a cero al aumentar el tamaño de muestra.

La consistencia en media cuadrática del estimador garantiza la consistencia.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

Consistencia en media cuadrática

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es consistente en media cuadrática para θ si

- Es asintóticamente insesgado.
- Su varianza tiende a cero al aumentar el tamaño de muestra.

La consistencia en media cuadrática del estimador garantiza la consistencia.

- La media muestral es un estimador consistente de la media poblacional

ESTIMACIÓN PUNTUAL

1. Estimación Puntual. Propiedades de los Estimadores.
   - Introducción
   - Propiedades de los estimadores
     - Insesgadez
     - Eficiencia relativa
     - Eficiencia
     - Error Cuadrático Medio (ECM)
     - Suficiencia
   - Propiedades de tipo asintótico
     - Insesgadez asintótica
     - Consistencia
     - Consistencia en media cuadrática
     - Normalidad asintótica

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

NORMALIDAD ASINTÓTICA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente normal para θ si converge en distribución a la distribución normal.

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

NORMALIDAD ASINTÓTICA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente normal para θ si converge en distribución a la distribución normal. Es decir,

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

NORMALIDAD ASINTÓTICA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente normal para θ si converge en distribución a la distribución normal. Es decir,

- Si Φ es la función de distribución de la distribución $N(0,1)$ y F_n es la función de distribución de

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

NORMALIDAD ASINTÓTICA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente normal para θ si converge en distribución a la distribución normal. Es decir,

- Si Φ es la función de distribución de la distribución $N(0,1)$ y F_n es la función de distribución de

$$\frac{\widehat{\theta}_n - E[\widehat{\theta}_n]}{\sqrt{Var(\widehat{\theta}_n)}},$$

entonces

Estimación puntual: Propiedades asintóticas

NORMALIDAD ASINTÓTICA

El estimador $\widehat{\theta}_n$ es asintóticamente normal para θ si converge en distribución a la distribución normal. Es decir,

- Si Φ es la función de distribución de la distribución $N(0, 1)$ y F_n es la función de distribución de

$$\frac{\widehat{\theta}_n - E[\widehat{\theta}_n]}{\sqrt{Var(\widehat{\theta}_n)}},$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \Phi(x), \text{para todo } x.$$